

**Frühjahr 26 Themennummer 2 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0$ und $f_\alpha : \mathbb{C} \setminus \{\pm\alpha\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f_\alpha(z) := \frac{\sin(z)}{z^2 - \alpha^2}$. Weiter sei γ der geschlossene Weg, der die Punkte $4 - 4i, 4 + 4i, -1 - i, -1 + i, 4 - 4i$ in der angegebenen Reihenfolge durch Geradenstücke verbindet.

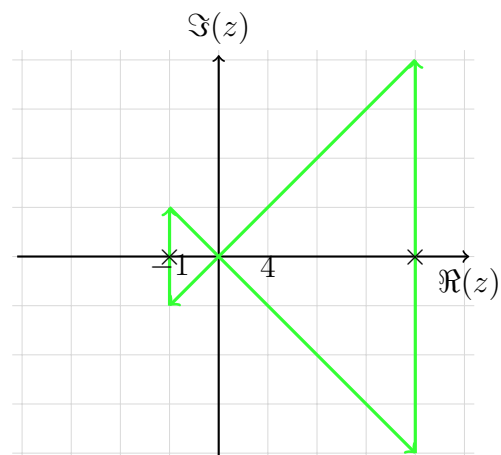
- Begründen Sie, für welche Werte von α das komplexe Wegintegral $\int_\gamma f_\alpha(z) dz$ definiert ist.
- Bestimmen Sie für die in a) gefundenen Werte von α anhand einer Skizze jeweils die Umlaufzahlen $\text{ind}(\gamma, \alpha)$ und $\text{ind}(\gamma, -\alpha)$.
- Berechnen Sie für die in a) gefundenen Werte von α jeweils das komplexe Wegintegral $\int_\gamma f_\alpha(z) dz$.

Lösungsvorschlag:

- a) Geradenstücke die $a \in \mathbb{C}$ mit $b \in \mathbb{C}$ verbinden können durch $\Gamma : [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\Gamma_a^b(t) := a + (b - a)t$ parametrisiert werden. Das obige Wegintegral ist genau dann definiert, wenn $\pm\alpha$ in keinem von den Geradenstücken liegt. Wir betrachten die vier Segmente getrennt und bestimmen die Schnittpunkte mit der reellen Achse, wozu wir den Ansatz $\Im(\Gamma_a^b(t)) = 0$ nutzen.

- $\Im(\Gamma_{4-4i}^{4+4i}(t)) = \Im(4 - 4i + 8ti) = 8t - 4 \stackrel{!}{=} 0 \iff t = \frac{1}{2}$, also $\Gamma_{4-4i}^{4+4i}(\frac{1}{2}) = 4$
- $\Im(\Gamma_{4+4i}^{-1-i}(t)) = \Im(4 + 4i - 5t - 5ti) = 4 - 5t \stackrel{!}{=} 0 \iff t = \frac{4}{5}$, also $\Gamma_{4+4i}^{-1-i}(\frac{4}{5}) = 0$
- $\Im(\Gamma_{-1-i}^{-1+i}(t)) = \Im(-1 - i + 2ti) = 2t - 1 \stackrel{!}{=} 0 \iff t = \frac{1}{2}$, also $\Gamma_{-1-i}^{-1+i}(\frac{1}{2}) = -1$
- $\Im(\Gamma_{-1+i}^{4-4i}(t)) = \Im(-1 + i + 5t - 5ti) = 1 - 5t \stackrel{!}{=} 0 \iff t = \frac{1}{5}$, also $\Gamma_{-1+i}^{4-4i}(\frac{1}{5}) = 0$

Damit schneidet der geschlossene Weg γ die reelle Achse genau an den drei Punkten $-1, 0, 4$. Die Werte α für die das Wegintegral definiert ist, sind diejenigen für die $-1, 0, 4$ keine Singularitäten von f_α darstellen, also $\alpha \in (0, \infty) \setminus \{1, 4\} = (0, 1) \cup (1, 4) \cup (4, \infty)$.



- b)
- | | | |
|-------------------------|----------------------------------|------------------------------------|
| $1 > \alpha > 0 :$ | $\text{ind}(\gamma, \alpha) = 1$ | $\text{ind}(\gamma, -\alpha) = -1$ |
| $4 > \alpha > 1 :$ | $\text{ind}(\gamma, \alpha) = 1$ | $\text{ind}(\gamma, -\alpha) = 0$ |
| $\infty > \alpha > 4 :$ | $\text{ind}(\gamma, \alpha) = 0$ | $\text{ind}(\gamma, -\alpha) = 0$ |

- c) Wir verwenden Cauchys Integralformel (CIF) und trennen den Weg dafür in der 0 auf. Wir betrachten den Dreiecksweg γ_1 , der $0, -1-i, -1+i, 0$ in dieser Reihenfolge durch Strecken verbindet und genauso den Dreiecksweg γ_2 , der $0, 4-4i, 4+4i, 0$ verbindet. Dann ist γ die Komposition der beiden Wege und das Wegintegral über γ die Summe der Wegintegrale über γ_1 und γ_2 .

Für γ_1 wenden wir CIF auf $\partial B_\alpha(-\alpha)$ und die auf $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) < \alpha\}$ holomorphe Funktion $z \mapsto \frac{\sin(z)}{z-\alpha}$ an und erhalten $\int_{\gamma_1} f_\alpha dz = -2\pi i \frac{\sin(-\alpha)}{-2\alpha} = -\pi i \frac{\sin(\alpha)}{\alpha}$.

Für γ_2 wenden wir CIF auf $\partial B_\alpha(\alpha)$ und die auf $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > -\alpha\}$ holomorphe Funktion $z \mapsto \frac{\sin(z)}{z+\alpha}$ an und erhalten $\int_{\gamma_2} f_\alpha dz = 2\pi i \frac{\sin(\alpha)}{2\alpha} = \pi i \frac{\sin(\alpha)}{\alpha}$.

Die Summe dieser Werte ist der Wert des Wegintegrals längs γ , also 0.

J.F.B.