

**Frühjahr 26 Themennummer 2 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Bestimmen Sie mit sorgfältiger Begründung jeweils alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

- a) $\forall z \in \mathbb{C} : f(z)f(\bar{z}) = -1$
- b) $\forall z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}f(z) + \operatorname{Im}f(z) = 1$ und $f(i) = i$
- c) $\forall z \in \mathbb{C} : zf'(z) = f(z)$ und $f'(0) = i$

Lösungsvorschlag:

- a) Wir betrachten die holomorphe Funktion $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g(z) =: f(z)^2$. Für alle $z \in \mathbb{R}$ gilt $z = \bar{z}$ und $g(z) = f(z)f(\bar{z}) = -1$. Damit stimmt die holomorphe Funktion g auf $\mathbb{R}$ mit der Funktion, die konstant -1, welche ebenfalls holomorph ist, überein. Weil $\mathbb{R}$ sich in 0 häuft, folgt aus dem Identitätssatz, dass beide Funktionen auf $\mathbb{C}$ übereinstimmen. Also folgt $f(z)^2 = -1$ und $f(z) \in \{i, -i\}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Aus der Holomorphie von f folgt deren Stetigkeit und damit entweder $f \equiv i$ oder $f \equiv -i$. Umgekehrt haben die Konstanten $\pm i$ die gesuchten Eigenschaften.
- b) Angenommen f wäre nicht konstant, dann wäre $f(\mathbb{C})$ ein Gebiet nach dem Satz von der Gebietstreue. Per Voraussetzung gilt $f(\mathbb{C}) \subset \{x+iy \in \mathbb{C} : x+y = 1\} =: V$, diese Menge besitzt aber keine inneren Punkte, da es sich um eine affine Gerade durch (0,1) handelt. Genauer: Angenommen $x_0 \in V$ wäre ein innerer Punkt, dann gäbe es ein $\varepsilon > 0$, sodass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \varepsilon$ auch $z + x_0 \in V$ liegt. Insbesondere liegt dann $x_0 + \frac{\varepsilon}{2} \in V$, aber es gilt $\operatorname{Re}(x_0 + \frac{\varepsilon}{2}) + \operatorname{Im}(x_0 + \frac{\varepsilon}{2}) = \operatorname{Re}(x_0) + \operatorname{Im}(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} \neq 1$, ein Widerspruch. Also kann $f(\mathbb{C})$ nicht offen sein und f muss konstant sein. Aus $f(i) = i$ folgt dann $f \equiv i$. Umgekehrt genügt f den Bedingungen, weil $i \in V$ liegt.
- c) Wir entwickeln f um 0 in eine Potenzreihe und erhalten ein $R > 0$ sodass für alle $z \in B_R(0)$ gilt, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = z \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^n$. Also ist $a_n(n-1) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, womit $a_n = 0$ für $n \neq 1$ folgt. Außerdem ist $a_1 = f'(0) = i$. Damit folgt $f(z) = iz$, was auch den Bedingungen genügt.

J.F.B.