

**Frühjahr 26 Themennummer 2 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Betrachten Sie die drei folgenden Aussagen:

- i) $\forall x \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall \varepsilon > 0 \forall y \in \mathbb{R} : (|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$
- ii) $\exists \alpha > 0 \forall x, y \in \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| \leq \alpha|x - y|$
- iii) $\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 \forall x, y \in \mathbb{R} : (|x - y| < \varepsilon \implies |f(x) - f(y)| < \delta)$

Welche der drei Aussagen implizieren, dass f stetig ist?

Welche der drei Aussagen sind äquivalent zur Stetigkeit von f auf $\mathbb{R}$? Begründen Sie Ihre Antwort. Bei Ihren Begründungen eventuell verwendete Aussagen über stetige Funktionen sind zu beweisen. Die Stetigkeit von Polynomfunktionen auf $\mathbb{R}$ darf ohne Beweis verwendet werden.

Lösungsvorschlag: Stetigkeit von f ist definiert als

$$\text{iv)} \quad \forall x \in \mathbb{R} \forall \varepsilon' > 0 \exists \delta' > 0 \forall y \in \mathbb{R} : (|x - y| < \delta' \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon')$$

Wir werden zeigen, dass die Implikationskette i) $\implies$ ii) $\implies$ iii) $\implies$ iv) gilt, insbesondere impliziert jede der Aussagen die Stetigkeit. Danach zeigen wir, dass die Implikation iv) $\implies$ iii) falsch ist, dann folgt, dass keine der Aussagen äquivalent zur Stetigkeit ist.

- i) $\implies$ ii): Falls i) erfüllt ist, dann ist f bereits konstant. Da ε unabhängig von δ gewählt werden darf, können wir ε gegen 0 streben lassen und folgern, dass

$$|x - y| < \delta \implies 0 \leq |f(x) - f(y)| \leq 0,$$

also $|f(x) - f(y)| = 0$ und $f(x) = f(y)$ gilt. Seien jetzt $x < y$ beliebig. Wir definieren $x_n := x + n \frac{\delta}{2}$. Für $n \rightarrow \infty$ folgt $x_n \rightarrow \infty$, also gibt es ein maximales $N \in \mathbb{N}$ mit $x_N \leq y$. Insbesondere folgt dann $x_{N+1} > y$. Setzen wir $x_0 = x$, so gilt für alle $0 \leq j \leq N$, dass $|x_j - x_{j+1}| = \frac{\delta}{2} < \delta$. Wegen $x_N \leq y \leq x_{N+1}$ gilt außerdem $|x_N - y| = y - x_N \leq x_{N+1} - x_N = |x_{N+1} - x_N| < \delta$. Also folgt $f(x_j) = f(x_{j+1})$ für alle $0 \leq j \leq N$ sowie $f(x_N) = f(y)$, also $f(x) = f(x_1) = \dots = f(x_N) = f(y)$. Also folgt $f(x) = f(y)$ für alle $x \neq y \in \mathbb{R}$ und für $x = y$ ist nichts zu zeigen.

Wählen wir $\alpha = 1$ so ist ii) offensichtlich erfüllt.

- ii) $\implies$ iii): Sei $\delta > 0$, dann wählen wir $\varepsilon := \frac{\delta}{\alpha}$. Nun folgt

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha|x - y| < \alpha\varepsilon = \delta$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \varepsilon$.

- iii) $\implies$ iv): Sei $x \in \mathbb{R}, \varepsilon' > 0$. Wir wählen für das δ in iii) nun ε' und erhalten ein $\varepsilon > 0$ welches wir als δ' in iv) wählen, unabhängig von x .
- iv) $\not\implies$ iii): Die Funktion $f(x) := x^2$ ist stetig, erfüllt also iv). Wir wählen $\delta = 1$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir wählen $x = \frac{\varepsilon}{2}$ und $y = x + \frac{\varepsilon}{2}$, dann gilt $|x - y| < \varepsilon$. Jedoch ist $|f(x) - f(y)| = \frac{\varepsilon^2}{4} + x\varepsilon \geq x\varepsilon = \delta$, also ist $|f(x) - f(y)| < \delta$ nicht erfüllt und iii) ist demnach ebenso falsch.

J.F.B.