

**Frühjahr 26 Themennummer 1 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$x' = \sin(t^2 + x^2), \quad x(0) = 0.$$

- a) Zeigen Sie, dass eine eindeutig bestimmte Lösung φ des Anfangswertproblems auf ganz $\mathbb{R}$ existiert und dass diese ungerade ist.
- b) Zeigen Sie: Das dritte Taylorpolynom T_3 von φ um den Entwicklungspunkt 0 hat die Gestalt

$$T_3(t) = \frac{t^3}{3}.$$

- c) Zeigen Sie, dass es ein $\tau > 0$ mit $\varphi^{(4)}(\tau) < 0$ gibt. (Hierbei bezeichnet $\varphi^{(4)}$ wie üblich die vierte Ableitung von φ .)

Hinweis: Es könnte hilfreich sein, mittels Widerspruchsannahme zu argumentieren und das Wachstumsverhalten von $\varphi(t)$ für $t \rightarrow \infty$ geeignet abzuschätzen.

Lösungsvorschlag:

- a) Die Strukturfunktion ist glatt, also stetig und lokal lipschitzstetig bezüglich x . Deshalb existiert eine eindeutige lokale Lösung des Anfangswertproblems um 0. Weil die Strukturfunktion betragsmäßig durch 1 beschränkt ist, liegt linear beschränktes Wachstum vor und die Lösung kann global fortgesetzt werden ohne die Eindeutigkeit zu verlieren.

Um zu zeigen, dass φ ungerade ist, müssen wir $\varphi(t) = -\varphi(-t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ zeigen. Sei $g(t) := -\varphi(-t)$, dann ist

$$g'(t) = \varphi'(-t) = \sin((-t)^2 + \varphi(-t)^2) = \sin(t^2 + g'(t)^2)$$

sowie $g(0) = \varphi(0) = 0$. Also löst auch g das Anfangswertproblem, woraus, wegen der Eindeutigkeit der Lösung, auch $g = \varphi$ folgt, also ist φ ungerade.

- b) Wir berechnen $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = \sin(0) = 0$. Für die höheren Ableitungen erhalten wir

$$\varphi''(t) = \cos(t^2 + \varphi(t)^2)(2t + 2\varphi(t)\varphi'(t)), \varphi''(0) = 0$$

und

$$\varphi'''(t) = -\sin(t^2 + \varphi(t)^2)(2t + 2\varphi(t)\varphi'(t))^2 + \cos(t^2 + \varphi(t)^2)(2 + 2(\varphi'(t))^2 + 2\varphi(t)\varphi''(t)), \varphi'''(0) = 2.$$

Insgesamt also $T_3(t) = 0 + 0t + \frac{0}{2}t^2 + \frac{2}{6}t^3 = \frac{t^3}{3}$.

- c) Angenommen die Aussage wäre falsch, so würde $\varphi^{(4)} \geq 0$ und somit streng monotonen Wachstum für φ''' auf $[0, \infty)$ folgen. Wegen $\varphi'''(0) = 2$ folgt daraus $\varphi'''(t) \geq 2$ und $\varphi''(t) = \varphi''(0) + \int_0^t \varphi'''(s) \, ds \geq \int_0^t 2 \, ds = 2t$. Analog folgt $\varphi'(t) \geq t^2$ und $\varphi(t) \geq t^3$ für alle $t \in [0, \infty)$.

Dies liefert einen Widerspruch zu b) und dem Satz von Taylor. Laut diesem würde nämlich, weil φ glatt, also viermal stetig differenzierbar ist, folgen, dass

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{|\varphi(t) - T_3(t)|}{t^3} = 0.$$

Aber $\frac{|\phi(t) - T_3(t)|}{t^3} \geq \frac{2}{3}$ gilt für alle $t \geq 0$ und folglich auch für den Grenzwert bei $0+$.

J.F.B.