

**Frühjahr 26 Themennummer 1 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Sei

$$E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \sin(x) \sin(y).$$

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \sin(x) \cos(y) \\ -\cos(x) \sin(y) \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte und lokalen Extremstellen von E .
- b) Zeigen Sie, dass E eine Erhaltungsgröße der gegebenen Differentialgleichung ist.
- c) Untersuchen Sie alle Ruhelagen der gegebenen Differentialgleichung auf Stabilität, asymptotische Stabilität bzw. Instabilität.

Lösungsvorschlag:

- a) Der Gradient von E ist $\nabla E(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(x) \sin(y) \\ \sin(x) \cos(y) \end{pmatrix}$, wir suchen dessen Nullstellen.

Aus $\cos(x) \sin(y) = 0$ folgt $\cos(x) = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ oder $\sin(y) = 0 \iff y = k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Im ersten Fall gilt $|\sin(x)| = 1$ und die zweite Gleichung liefert $\cos(y) = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k'\pi$ und im zweiten Fall folgt $|\cos(y)| = 1$, weshalb die zweite Gleichung auf $\sin(x) = 0 \iff x = k'\pi$ führt, wobei jeweils $k' \in \mathbb{Z}$ ist. Jeder solche Punkt liefert auch eine Nullstelle des Gradienten. Wir erhalten also

$$\{(k\pi, k'\pi), (\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k'\pi) : k, k' \in \mathbb{Z}\}$$

als die Menge der kritischen Punkte.

Für lokale Extremalität untersuchen wir die Hessematrix von E , nämlich $H_E(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin(x) \sin(y) & \cos(x) \cos(y) \\ \cos(x) \cos(y) & -\sin(x) \sin(y) \end{pmatrix}$. Setzen wir die kritischen Punkte ein, so folgt

$$H_E(k\pi, k'\pi) = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{k+k'} \\ (-1)^{k+k'} & 0 \end{pmatrix} \text{ und } H_E(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k'\pi) = \begin{pmatrix} (-1)^{k+k'+1} & 0 \\ 0 & (-1)^{k+k'+1} \end{pmatrix}.$$

Im ersten Fall ist das charakteristische Polynom $\lambda^2 - 1$ mit Nullstellen 1 und -1, weshalb die Matrix indefinit und die kritischen Stellen Sattelpunkte sind. Im zweiten Fall stehen die Eigenwerte auf der Diagonalen und sind beide positiv, falls $k + k' + 1$ gerade ist und beide negativ, falls $k + k' + 1$ ungerade ist. Sind beide Eigenwerte positiv, so handelt es sich um ein lokales, striktes Minimum, sind beide negativ, so liegt ein lokales striktes Maximum vor.

- b) Der Gradient ist in jedem Punkt orthogonal zur Strukturfunktion, also ist E eine Erhaltungsgröße.
- c) Wir benutzen den Linearisierungssatz. Für die Jacobimatrix J der Strukturfunktion erhalten wir $J(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(x) \cos(y) & -\sin(x) \sin(y) \\ \sin(x) \sin(y) & -\cos(x) \cos(y) \end{pmatrix}$. Wir setzen die Ruhelagen

ein und erhalten $J(k\pi, k'\pi) = \begin{pmatrix} (-1)^{k+k'} & 0 \\ 0 & (-1)^{k+k'+1} \end{pmatrix}$. Diese Matrizen sind in Diagonalform und tragen ihre Eigenwerte auf der Diagonalen, einer davon ist immer 1, besitzt also positiven Realteil, weshalb (asymptotische) Instabilität folgt. Weiter ist $J(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k'\pi) = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{1+k+k'} \\ (-1)^{k+k'} & 0 \end{pmatrix}$ was das charakteristische Polynom $\lambda^2 + 1$ mit Nullstellen $\pm i$ liefert. Hier liefert der Linearisierungssatz keine Aussage. Die Funktionen $\pm E$ sind Erhaltungsgrößen, also Lyapunovfunktionen des Systems. Nach a) ist jeder Punkt $(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k'\pi)$ mit $k, k' \in \mathbb{Z}$ Maximum oder Minimum von E , also Minimum von $-E$ oder E und somit stabil. Jedoch ist keiner der Punkte attraktiv. Sei $\varepsilon > 0$ und $x_0 = (\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k'\pi)$ eine Ruhelage mit $k, k' \in \mathbb{Z}$. Sei u_ε die Lösung zur Anfangsbedingung $u(0) = x_0 + (\varepsilon, \varepsilon)$. Dann gilt $E(u(t)) = E(u(0)) = \sin(\varepsilon)^2$, weil E eine Erhaltungsgröße ist. Wäre eine Ruhelage attraktiv, so müsste für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ die Lösung u_ε gegen x_0 konvergieren. Aus der Stetigkeit von E würde dann $\sin(\varepsilon)^2 = E(u_\varepsilon(t)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} E(x_0) = 0$ folgen, ein Widerspruch.

J.F.B.