

**Frühjahr 26 Themennummer 1 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Sei

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0, i - i\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{1 + z^2} \cos\left(\frac{1}{z}\right)$$

und sei $U := \{iy : y \in [-1, 1]\}$.

- a) Bestimmen Sie die Art jeder isolierten Singularität von f und berechnen Sie die Residuen von f in jeder isolierten Singularität.
- b) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{C} \setminus \{0, i, -i\}$ keine Stammfunktion besitzt.
- c) Zeigen Sie, dass die Einschränkung $g := f|_U$ von f auf U eine Stammfunktion besitzt.

Lösungsvorschlag:

- a) Wir schreiben $f(z) = \frac{\cos(\frac{1}{z})}{(z-i)(z+i)}$ um zu sehen, dass i und $-i$ einfache Pole sind, weil der Zähler holomorph um i und $-i$ ist und der Nenner einfache Nullstellen bei i und $-i$ besitzt. Für die Residuen berechnen wir

$$\text{Res}_i(f) = \lim_{z \rightarrow i} f(z)(z - i) = \frac{\cos(-i)}{2i}$$

$$\text{Res}_{-i}(f) = \lim_{z \rightarrow -i} f(z)(z + i) = \frac{\cos(i)}{-2i}$$

unter Verwendung der Stetigkeit von $f(z)(z - i)$ und $f(z)(z + i)$.

Für die Untersuchung von 0 bestimmen wir die Laurent-Entwicklung. Der erste Faktor konvergiert als geometrische Reihe auf dem offenen Einheitskreis gegeben durch $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$. Für den zweiten Faktor erhalten wir auf $\mathbb{C}^\times$ die Darstellung

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{-2n}$ aus der Taylorreihe des Kosinus. Mit dem Cauchyprodukt sehen wir, dass die Laurent-Entwicklung nur gerade Potenzen besitzt, das Residuum beträgt also 0. Die Darstellung lässt vermuten, dass 0 eine wesentliche Singularität ist, aber es ist nicht ganz einfach zu sehen, dass der Hauptteil nicht abbricht. Wir argumentieren daher anders:

Die Nullfolgen $z_n := \frac{1}{2n\pi}$, $w_n := \frac{1}{(2n+1)\pi}$ liegen in $\mathbb{C} \setminus \{0, i, -i\}$ und erfüllen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = 1 \neq -1 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(w_n),$$

also handelt es sich bei 0 um eine wesentliche Singularität.

- b) Wir berechnen das Wegintegral längs des Weges

$$\gamma : [0, 2\pi] \ni t \mapsto i + \frac{e^{it}}{2}$$

mittels Cauchyintegralformel und $f(z) = \frac{\cos(\frac{1}{z})}{z-i}$ (oder Residuensatz) und erhalten $\pi \cos(-i) \neq 0$ also besitzt f keine Stammfunktion.

- c) f ist stetig und $\mathbb{C} \setminus U$ ist offen. Sei γ eine geschlossene C^1 -Kurve in $\mathbb{C} \setminus U$, dann stimmen die Windungszahlen um 0 , i und $-i$ überein. Die Summe der Residuen in diesen Punkten ist, wegen $\cos(-i) = \cos(i)$, 0 . Nach dem Residuensatz, angewendet auf die holomorphe Funktion f , die konvexe, offene Menge $\mathbb{C}$, die endliche Menge $\{0, i, -i\}$ und den geschlossenen, stückweise stetig differenzierbaren Weg γ , beträgt das Wegintegral also 0 . Damit besitzt f eine Stammfunktion.

J.F.B.