

**Frühjahr 26 Themennummer 1 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

Sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Welche der folgenden Funktionen $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ hat einen Fixpunkt in $\mathbb{D}$, d. h. es gibt ein $z_* \in \mathbb{D}$ mit $f(z_*) = z_*$? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

a) $f(z) = z^2 + \frac{1}{2}$

b) $f(z) = e^z - \frac{3}{2}$

c) $f(z) = e^z + 4i$

d) $f(z) = \frac{1}{3}e^z$

Lösungsvorschlag:

Wir bemerken zunächst, dass f genau dann einen Fixpunkt besitzt, wenn $g(z) := f(z) - z$ eine Nullstelle besitzt. Zudem formulieren wir einen Spezialfall des Satzes von Rouché in folgender Form:

Seien $g, h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, wobei $|g(z)| > |h(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gelte. Dann haben g und $g + h$, mit Vielfachheit gezählt, gleich viele Nullstellen in $\mathbb{D}$.

- a) Mit der Lösungsformel bestimmen wir die Nullstellen von $z^2 - z + \frac{1}{2}$ als $\frac{1 \pm i}{2}$. Beide haben einen Betrag von $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, liegen also in $\mathbb{D}$. Damit besitzt f die beiden Fixpunkte $\frac{1 \pm i}{2}$.
- b) Wir betrachten die stetige Funktion $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := e^x - x - \frac{3}{2}$ und berechnen $g(-1) = \frac{1}{e} - \frac{1}{2} < 0 < e - \frac{5}{2} = g(1)$. Nach Bolzanos Nullstellensatz oder dem Zwischenwertsatz hat g eine Nullstelle in $(-1, 1) \subset \mathbb{D}$ und f folglich einen Fixpunkt.
- c) f hat keinen Fixpunkt. Gäbe es ein $z_* \in \mathbb{C}$ mit $|z_*| < 1$ und $f(z_*) = z_*$, so wäre $4i = z_* - e^{z_*}$ und $4 = |z_* - e^{z_*}|$. Es gilt aber $|z_* - e^{z_*}| \leq |z_*| + |e^{z_*}| < 1 + e < 4$, ein Widerspruch. Dabei sieht man $|e^z| \leq e^{|z|}$ aus einer Entwicklung in die Potenzreihe oder aus der Monotonie auf $\mathbb{R}$ sowie $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$. Alternativ folgt die Aussage mit dieser Abschätzung aus dem Satz von Rouché mit der Wahl $g(z) = 4i$, $h(z) = e^z - z$, da g keine Nullstelle hat.
- d) Wir betrachten wieder die stetige Funktion $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := \frac{1}{3}e^x - x$ und berechnen $g(-1) = \frac{1}{3e} + 1 > 0 > \frac{e}{3} - 1 = g(1)$. Wieder folgt die Existenz eines Fixpunkts von f aus Bolzanos Nullstellensatz oder dem Zwischenwertsatz. Alternativ kann man den Satz von Rouché mit $g(z) = -z$, $h(z) = \frac{1}{3}e^z$ benutzen, weil $|h(z)| < \frac{e}{3} < 1 = |g(z)|$ erfüllt ist. Da g eine Nullstelle, nämlich 0, in $\mathbb{D}$ hat, hat auch $g + h$ eine Nullstelle und damit f einen Fixpunkt in $\mathbb{D}$.

J.F.B.