

**Frühjahr 26 Themennummer 1 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen
Analysis (vertieftes Lehramt)**

a) Sei

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{wenn } x \neq 0 \\ 0, & \text{wenn } x = 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist. Berechnen Sie zudem die Ableitung f' von f .

b) Beweisen oder widerlegen Sie: Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $g'(0) > 0$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $g|_{]-\varepsilon, \varepsilon[}$ monoton wachsend ist.

Lösungsvorschlag:

a) In $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist f differenzierbar als Verknüpfung differenzierbarer Funktionen. Mit Ketten- und Summen- sowie Faktor- und Produktregel finden wir

$$f'(x) = \frac{1}{2} + 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Für $x = 0$ untersuchen wir den Differentialquotienten. Es gilt

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{1}{2} + h \sin\left(\frac{1}{h}\right) \rightarrow \frac{1}{2}$$

für $h \rightarrow 0$. Dabei wurde $0 \leq |h \sin(\frac{1}{h})| \leq |h| \rightarrow 0$ benutzt um mit dem Sandwichlemma auf Konvergenz des zweiten Summanden gegen 0 zu schließen. Also gilt $f'(0) = \frac{1}{2}$.

b) Das ist falsch, ein Gegenbeispiel liefert die Funktion aus a). Diese ist differenzierbar mit $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$. Wäre f auf $] -\varepsilon, \varepsilon[$ monoton wachsend, so müsste f' dort nicht-negativ sein. Wir betrachten $x_n := \frac{1}{(2n+1)\pi}$, dann handelt es sich bei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ um eine Nullfolge mit $g'(x_n) = -\frac{1}{2} < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in] -\varepsilon, \varepsilon[$ und $f'(x_n) = -\frac{1}{2} < 0$, weshalb f nicht monoton wachsend auf $] -\varepsilon, \varepsilon[$ sein kann.

J.F.B.