**Frühjahr 25 Themennummer 3 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)**

a) Bestimmen Sie die maximale Lösung von $x' = -2tx^2, x(0) = 1$.

b) Zeigen Sie, dass es genau eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{i, -i\} \to \mathbb{C}$ mit $f(0) = 1$ und $f'(z) = -2z(f(z))^2$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\{i, -i\}$ gibt.

**Lösungsvorschlag:**

a) Es handelt sich um eine trennbare Differentialgleichung. Die Strukturfunktion ist glatt also lokal lipschitzstetig, die Nulllösung ist eine Lösung der Differentialgleichung. Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz gibt es genau eine Maximallösung des Anfangswertproblems und, weil es sich dabei nicht um die Nulllösung handelt, darf diese nicht geschnitten werden, also hat die Lösung keine Nullstelle. Daher erfüllt sie auch die Gleichung $-\frac{1}{x^2}x' = 2t$ und es folgt $\int_1^{x(t)} -\frac{1}{s^2}\,\mathrm{d}s = \int_0^t 2s\,\mathrm{d}s$, also $\frac{1}{x(t)} - 1 = t^2$, woraus $x(t) = \frac{1}{t^2+1}$ folgt.

b) Die Funktion $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ hat natürlich die geforderten Eigenschaften. Weil jede Funktion mit diesen Eigenschaften das Anfangswertproblem aus a) löst, muss nach dem Satz von Picard-Lindelöf diese auf $\mathbb{R}$ schon mit $f$ übereinstimmen. Weil $\mathbb{R}$ Häufungspunkte in $\mathbb{C}$ besitzt, folgt die Eindeutigkeit nun aus dem Identitätssatz.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$