Frühjahr 25 Themennummer 3 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Wir betrachten die holomorphe Funktion

$$f : \mathbb{C}\backslash\{0, 1, -1\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{1-z^2} \exp\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

a) Bestimmen Sie die Art jeder isolierten Singularität von f und berechnen Sie die Residuen.

b) Berechnen Sie für

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}\backslash\{0, -1,1\}, \quad t \mapsto -1 + \frac{1}{2}e^{-it}$$

das Kurvenintegral $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$.

c) Zeigen Sie, dass f sich auf $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z+1| < 1\}$ nicht lokal gleichmäßig durch Polynome approximieren lässt.

Lösungsvorschlag:

a) Die Singularitäten ± 1 sind einfache Nullstellen des Nenners bei nicht verschwindendem Zähler, also Pole erster Ordnung. Mit der Residuenformel für Pole erster Ordnung folgt $\operatorname{Res}_f(\pm 1) = \frac{e}{\mp 2}$.
0 ist eine wesentliche Singularität, um das zu zeigen entwickeln wir f in eine Laurentreihe um 0. Der erste Faktor ist holomorph auf $B_1(0)$ und lässt sich dort in eine geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$ entwickeln. Den zweiten Faktor schreiben wir mittels der Reihendarstellung der Exponentialfunktion als $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!}$. Mit dem Cauchyprodukt erhalten wir die Laurentreihe der Funktion. Weil alle Koeffizienten reelle nichtnegative Zahlen sind, bricht der Hauptteil nie ab und die Singularität ist wesentlich. Wir berechnen explizit den Koeffizienten von $\frac{1}{z}$, weil es sich bei diesem um das Residuum von f in 0 handelt.
Aus dem Cauchyprodukt folgt $\operatorname{Res}_f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$, was wir mittels der Reihendarstellung der Sinusfunktion bestimmen können. Es gilt $\sin(i) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{i^{2n+1}}{(2n+1)!} = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$, also ist $\operatorname{Res}_f(0) = -i\sin(i) = \sinh(1)$.

b) Wir betrachten auf dem Sterngebiet $B_1(-1)$ die holomorphe Funktion $g(z) = \frac{1}{1-z}\exp(z^{-2})$. Der Weg γ verläuft vollständig in $B_1(-1)$ und umkreist -1 einmal in negativer Orientierung. Es ist $f(z) = \frac{g(z)}{z+1}$ für $z \in B_1(-1)$, nach Cauchys Integralformel gilt also $\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{g(z)}{z-(-1)}\ \mathrm{d}z = -2\pi i g(-1) = -e\pi i$.

c) Angenommen es gäbe eine Folge von Polynomen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die f lokal gleichmäßig approximiert, dann konvergiert $p_n \to f$ gleichmäßig auf der kompakten Menge

$\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{4} \leq |z+1| \leq \frac{3}{4}\}$, in welcher die Spur von γ vollständig enthalten ist. Dann konvergiert auch $(p_n \circ \gamma) \cdot \gamma'$ auf $[0, 2\pi]$ gleichmäßig gegen $(f \circ \gamma) \cdot \gamma'$ und wir dürfen Integration und Limesbildung vertauschen. Aus der Holomorphie von p_n folgt aus Cauchy Integralsatz dann $0 = \lim\limits_{n\to\infty} 0 =$

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\gamma} p_n(z)\mathrm{d}z = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} p_n(\gamma(z))\gamma'(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} f(\gamma(z))\gamma'(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z,$$

ein Widerspruch zu b) und $0 \neq -e\pi i$.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$