Frühjahr 25 Themennummer 3 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} |y| \\ x \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen SIe, dass $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \xi$ für jedes $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutige, auf $\mathbb{R}$ definierte maximale Lösung $\lambda_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ besitzt.

b) Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine instabile Ruhelage von $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist.
Hinweis: Betrachten Sie dazu Lösungen mit Anfangswerten $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ für $\xi_2 > 0$.

Lösungsvorschlag:

a) Die Strukturfunktion ist global definiert und lipschitzstetig mit Konstante 1, denn $\|f(x,y) - f(x',y')\|_1 = ||y| - |y'|| + |x - x'| \leq |x - x'| + |y - y'| = \|(x,y) - (x',y')\|_1$ woraus insbesondere auch die lineare Beschränktheit des Wachstums folgt. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf existiert eine eindeutige Maximallösung zu jedem Anfangswert. die wegen der linearen Beschränktheit des Wachstums auf $\mathbb{R}$ existiert.

b) Für $c > 0$ ist die Funktion $(x(t), y(t)) = (c \sinh(t), c \cosh(t))$ eine Lösung der Differentialgleichung, weil $\cosh(t) \geq 1 > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Diese erfüllen die Anfangsbedingung $(x(0), y(0)) = (0, c)$.
Sei $\varepsilon > 0$, dann ist $\left\|(0, \frac{\varepsilon}{2})\right\|_2 < \varepsilon$, aber beide Komponenten der zugehörigen Lösung $\lambda_{(0,\frac{\varepsilon}{2})} = (\frac{\varepsilon}{2}\sinh(t), \frac{\varepsilon}{2}\cosh(t))$ divergieren für $t \to \infty$ gegen ∞, deren Norm also ebenso. Per Definitionem ist 0 daher instabil weil es in jeder Umgebung von 0 Anfangswerte gibt, für die die Lösung sogar unbeschränkt ist und sich daher insbesondere beliebig weit von der Nulllösung entfernt. Dass (0,0) eine Ruhelage darstellt ist klar, weil es sich um eine (sogar die einzige) Nullstelle von f handelt.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$