Frühjahr 25 Themennummer 3 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Entscheiden Sie jeweils durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

a) Es gibt eine holomorphe Funktion $f : \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1\} \to \mathbb{C}$ mit $f^{(k)}(1) = (k+1)!$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

b) Es gibt eine biholomorphe Funktion $g : \mathbb{C} \to \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

c) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = xe^{-nx^2}$, konvergiert gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

Lösungsvorschlag:

a) Wahr. Die Funktion $f(z) := \sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)(z-1)^k$ ist analytisch, also holomorph und konvergiert nach der Formel von Cauchy Hadamard auf dem angegebenen Gebiet und erfüllt $f^{(k)}(1) = (k+1)!$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ nach der Taylorformel. (Es gilt $f(z) = \frac{1}{(2-z)^2}$, hier kann man die ersten beiden Eigenschaften auch direkt sehen und die letzte Eigenschaft induktiv zeigen.)

b) Falsch. Die obere Halbebene ist offen, konvex also einfach zusammenhängend, nichtleer, denn sie enthält i und nicht $\mathbb{C}$, denn sie enthält $-i$ nicht. Also gibt es eine biholomorphe Abbildung $f : \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \to \mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ nach dem Abbildungssatz von Riemann. Gäbe es auch eine biholomorphe Abbildung $g : \mathbb{C} \to \mathbb{H}$, so wäre $f^{-1} \circ g : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ eine ganze, beschränkte Abbildung, also konstant nach dem Satz von Liouville, aber auch bijektiv als Verkettung bijektiver Funktionen. Dies ist ein Widerspruch, weil $\mathbb{D}$ mehr als einen Punkt enthält.

c) Wahr. Es gilt $f_n'(x) = (1-2nx^2)e^{-nx^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit Nullstellen $x_n^{\pm} := \pm\sqrt{\frac{1}{2n}}$. Wegen $f_n'(x) < 0$ auf $\mathbb{R}\backslash[x_n^-, x_n^+]$ und $f_n'(x) > 0$ auf (x_n^-, x_n^+) handelt es sich bei x_- um ein lokales Minimum und bei x_+ um ein lokales Maximum. Weil alle f_n stetig auf $\mathbb{R}$ sind und $\lim\limits_{|x|\to\infty} f_n(x) = 0$ erfüllen, handelt es sich sogar um die globalen Maxima. (Für $C > 0$ groß genug ist f_n auf $\mathbb{R}\backslash(-C, C)$ durch $\frac{f(x_+)}{2}$ beschränkt. Auf $[-C, C]$ muss es ein globales Maximum und Minimum geben, das dort angenommen wird, es kann sich nicht um einen Randwert handeln, weil die Funktionswerte bei $x_{\pm}$ größer bzw. kleiner sind. Weil diese auch größer bzw. kleiner als alle Funktionswerte für $x \in \mathbb{R}\backslash(-C, C)$ sind, existieren globale Extrema auf $\mathbb{R}$, diese müssen stationäre Punkte sein.) Wegen $\|f_n\|_\infty = |f_n(x_n^+)| = |f_n(x_n^-)| = \sqrt{\frac{e}{2n}} \to 0$ für $n \to \infty$, konvergiert f_n gleichmäßig gegen 0.

$\mathcal{J.F.B.}$