Frühjahr 25 Themennummer 3 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Bestimmen Sie Art und Lage aller lokalen Extrema von

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = xe^{-x^2-y^2}.$$

b) Zeigen Sie, dass alle stationären Lösungen des ebenen autonomen Systems

$$x' = 2xy$$

$$y' = 1 - 2x^2$$

stabil sind.
Hinweis: Aufgabenteil a) kann hier hilfreich sein.

Lösungsvorschlag:

a) Wir kürzen $g(x, y) = e^{-x^2-y^2} > 0$ ab und bestimmen den Gradienten von f : $\nabla f(x, y) = g(x, y)(1 - 2x^2, -2xy)^{\mathrm{T}} = 0 \iff x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}, y = 0$. Die Auswertung der Hessematrix $H_f(x, y) = g(x, y) \begin{pmatrix} -6x + 4x^3 & -2y + 4x^2y \\ -2y + 4x^2y & -2x + 4xy^2 \end{pmatrix}$ an den stationären Punkten führt auf die Matrizen $H_f\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}, 0\right) = \begin{pmatrix} \mp\sqrt{8} & 0 \\ 0 & \mp\sqrt{2} \end{pmatrix}$, also ist die Matrix für $x_+ := \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, 0\right)$ negativ definit und x_+ ist ein lokales (striktes) Maximum und für $x_- := \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, 0\right)$ ist sie positiv definit und x_- ist ein lokales (striktes) Minimum. Weitere stationäre Punkte gibt es nicht, also auch keine weiteren Extremalstellen.

b) Bei f und $-f$ handelt es sich um Lyapunovfunktionen diesen Systems, denn $\langle \nabla \pm f(x, y), (2xy, 1-2x^2) \rangle = 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Die Ruhelagen des Systems sind genau die in a) bestimmten stationären Punkte. Weil x_- ein striktes Minimum von f ist, handelt es sich hier um eine stabile Ruhelage. Weil x_+ ein striktes Minimum von $-f$ ist, handelt es sich hier um eine stabile Ruhelagen. Weitere gibt es nicht, also ist jede Ruhelage stabil.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$