Frühjahr 25 Themennummer 2 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Gegeben sei in Abhängigkeit des Parameters $a \in \mathbb{R}$ die reelle Differentialgleichung

$$\dot{x} = -x^4 + ax^2.$$

a) Geben Sie in Abhängigkeit von a die stationären Lösungen an.

b) Untersuchen Sie im Fall $a > 0$ die stationären Lösungen auf (asymptotische) Stabilität.

Lösungsvorschlag:

a) Die Nullstellen der Strukturfunktion sind wegen $0 = -x^4 + ax^2 = x^2(a - x^2)$ in jedem Fall die 0 und für $a > 0$ noch $\pm\sqrt{a}$.

b) Mittels Linearisierungssatz erhalten wir aus der Ableitung der Strukturfunktion $-4x^3 + 2ax$ keine Aussage für 0, für $a > 0$ ist aber $-4(\pm\sqrt{a})^3 \pm 2a\sqrt{a} = \mp 2(\sqrt{a})^3$ was für $\sqrt{a}$ negativ ist und für $-\sqrt{a}$ positiv ist. Also ist $\sqrt{a}$ asymptotisch stabil und $-\sqrt{a}$ instabil.
Um die 0 zu untersuchen betrachten wir die Lyapunovfunktion $L(x) = -\frac{1}{5}x^5 + \frac{a}{3}x^3 = x^3(\frac{a}{3} - \frac{x^2}{5})$. Für $|x| < \sqrt{\frac{5a}{3}}$ ist $\frac{a}{3} - \frac{x^2}{5} > 0$ und daher ist $L(x) < 0$ für $x \in (-\sqrt{\frac{5a}{3}},0)$ und $L(x) > 0$ für $x \in (0, \sqrt{\frac{5a}{3}})$. Daher ist 0, kein lokales Minimum von L. Wegen $L'(x)(-x^4 + ax^2) = -(-x^4 + ax^2)^2 < 0$ für $0 < |x| < \sqrt{a}$ ist nach der Direkten Methode von Lyapunov also 0 eine instabile Lösung.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$