Frühjahr 25 Themennummer 2 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $G \neq \emptyset$ und seien $f, g : G \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Für Teilaufgabe b) sei ferner $\gamma : [0,1] \to G$ eine stetig differenzierbare, geschlossene Kurve, die den Rand der Einheitskreisscheibe E in $\mathbb{C}$ genau einmal durchläuft und $E \subseteq G$.
Die folgenden drei Aussagen ähneln Versionen wichtiger Sätze der Funktionentheorie, sind aber in dieser Allgemeinheit falsch. Geben Sie jeweils ein Gegenbeispiel an, um letzteres zu belegen, und korrigieren Sie die Formulierungen unter Angabe der Namen der Sätze.

a) Ist f beschränkt, so ist f konstant.

b) Gilt $|g(z)| \leq |f(z)|$ für alle $z \in \gamma([0,1])$, so haben f und $f+g$ im Inneren der Kurve γ gleich viele Nullstellen (gerechnet mit Vielfachheiten).

c) Besitzt die Menge $\{z \in G : f(z) = g(z)\}$ einen Häufungspunkt, dann ist $f = g$.

Lösungsvorschlag:

a) Die Identitätsfunktion $z \mapsto z$ ist holomorph auf $G = E$, beschränkt durch 1, aber nicht konstant, weil $\frac{1}{2} \neq 0$ gilt.
Die korrekte Version des Satzes von Liouville lautet: Ist f beschränkt und ganz (also $G = \mathbb{C}$), so ist f konstant.

b) Wir betrachten $G = \mathbb{C}, f = \exp, g = -\exp$, dann besitzt f keine Nullstelle auf $E, f + g = 0$ aber sehr wohl.
Die korrekte Version diesen Spezialfalls vom Satz von Rouché lautet: Gilt $|g(z)| < |f(z)|$ für alle $z \in \gamma([0,1])$, so haben f und $f+g$ im Inneren der Kurve γ gleich viele Nullstellen (gerechnet mit Vielfachheiten), falls zudem f keine Null- oder Polstelle in $\gamma([0,1]) = \partial E$ besitzt.

c) Wir betrachten $G = \mathbb{C} \backslash \{0\}, f = 0, g = \cos(z^{-1})$, dann ist
$\{z \in G : f(z) = g(z)\} = g^{-1}(0) \supset \{\frac{2}{\pi + 2n\pi} : n \in \mathbb{N}\}$, welche sich in 0 häuft. Es gilt aber $g(1) = \cos(1) \neq 0 = f(1)$.
Die korrekte Version des Identitätssatzes lautet: Besitzt die Menge $\{z \in G : f(z) = g(z)\}$ einen Häufungspunkt in G, dann ist $f = g$.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$