Frühjahr 25 Themennummer 2 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Für $k \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$ betrachte man das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{\cos(t)}{2 - (\sin(t))^k}(2 - y^k), \qquad y(0) = 1.$$

a) Begründen Sie, warum dieses Anfangswertproblem für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine eindeutige maximale Lösung $\varphi_k : I_k \to \mathbb{R}$ besitzt.

b) Zeigen Sie, dass für das maximale Existenzintervall $I_k = \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

   Hinweis: Warum ist φ_k nach unten durch die Sinusfunktion und nach oben durch eine Konstante beschränkt?

c) Bestimmen Sie explizit die maximale Lösung des obigen Anfangswertproblems für $k = 1$.

Lösungsvorschlag:

a) Es gilt $|\sin(t)^k| = |\sin(t)|^k \leq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$, also verschwindet der Nenner nie. Demnach ist die Strukturfunktion als Verknüpfung glatter Funktionen selbst glatt, insbesondere also lokal lipschitzstetig. Weil die Funktion für jedes $k \in \mathbb{N}$ für alle $y, t \in \mathbb{R}$ definiert ist, folgt die Existenz einer eindeutigen Maximallösung zur Anfangsbedingung $y(0) = 1$ aus dem Satz von Picard-Lindelöf.

b) Für $y(t) = \sin(t)$ gilt $y'(t) = \cos(t) = \cos(t)\frac{2-(\sin(t))^k}{2-(\sin(t))^k} = \frac{\cos(t)}{2-(\sin(t))^k}(2 - y(t)^k)$, y stellt also eine Lösung dar. Eine andere Lösung ist $y(t) \equiv \sqrt[k]{2}$, denn für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $y'(t) = 0 = \frac{\cos(t)}{2-(\sin(t))^k} \cdot 0 = \frac{\cos(t)}{2-(\sin(t))^k}(2 - 2) = \frac{\cos(t)}{2-(\sin(t))^k}(2 - y^k)$.
Verschiedene Lösungskurven dürfen sich nicht schneiden, sonst wäre der Satz von Picard-Lindelöf verletzt. Die Sinusfunktion erfüllt $\sin(0) = 0 < 1 = \varphi_k(0)$, es muss also $\sin(t) < \varphi_k(t)$ für alle $t \in I_k$ gelten, gäbe es nämlich ein $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $\sin(t_0) > \varphi_k(t_0)$, so nach dem Zwischenwertsatz auch ein $t_1 \in \mathbb{R}$ mit $\sin(t_1) = \varphi_k(t_1)$, ein Widerspruch. Völlig analog zeigt man wegen $\sqrt[k]{2} > 1 = \varphi_k(0)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ auch $\varphi_k(t) < \sqrt[k]{2}$.
Die Maximallösung ist nach unten durch die Sinusfunktion beschränkt, die wiederum nach unten durch -1 beschränkt ist. Also verlässt die Bildmenge der Lösungskurve die kompakte Menge $[-1, \sqrt[k]{2}]$ nicht. Weil der Definitionsbereich der Strukturfunktion einen leeren Rand besitzt, kann sich die Lösung auch nicht dem Rand des Definitionsbereiches nähern. Nach der Charakterisierung des Randverhaltens maximaler Lösungen kann keine endliche Entweichzeit vorliegen und die Lösung existiert global auf $\mathbb{R}$.

c) Das sich ergebende Problem ist $y' = \frac{\cos(t)}{2-\sin(t)}(2 - y)$, also ein lineares Problem mit stetiger Inhomogenität. Eine Stammfunktion von $\frac{-\cos(t)}{2-\sin(t)}$ ist $\ln(2 - \sin(t))$, weshalb wir $y(t) = 2 - \sin(t)$ als Lösung des homogenen Problems erhalten. Mittels Variation der Konstanten erhalten wir aus dem Ansatz $\varphi_1(t) = c(t)(2 - \sin(t))$ die Anfangsbedingung $c(0) = \frac{1}{2}$ und die Integralbedingung $c'(t) = \frac{2\cos(t)}{(2-\sin(t))^2}$, wir bestimmen die allgemeine Stammfunktion mit der Substitution $x = \sin(t)$.

$$\int \frac{2\cos(t)}{(2-\sin(t))^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2}{(2-x)^2}\,\mathrm{d}x + c = \frac{2}{2-x} = \frac{2}{2-\sin(t)} + c,$$

also ist $c(t) = \frac{2}{2-\sin(t)} + c$ und aus $c(0) = \frac{1}{2}$ folgt $c = -\frac{1}{2}$ und daher schließlich $\varphi_1(t) = 1 + \frac{\sin(t)}{2}$. Nachrechnen verifiziert, dass es sich hierbei um die Lösung des Anfangswertproblems handelt.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$