Frühjahr 2025 Thema 2 Aufgabe 3

mks

6. Mai 2025

Für $k \in \mathbb{N}$ betrachte man das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{\cos(t)}{2-(\sin(t))^k}(2-y^k), \quad y(0) = 1$$

a) Begründen Sie, warum dieses Anfangswertproblem für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine eindeutige maximale Lösung $\varphi_k : I_k \to \mathbb{R}$ besitzt.

b) Zeigen Sie, dass für das maximale Existenzintervall $I_k = \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.
Hinweis: Warum ist φ_k nach unten durch die Sinusfunktion und nach oben durch eine Konstante beschränkt?

c) Bestimmen Sie explizit die maximale Lösung des obigen Anfangswertproblems für $k = 1$.

Lösung:

a)

Sei $f : k : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_k(t,y) = \frac{\cos(t)}{2-(\sin(t))^k}(2-y^k)$. Wegen $-1 \leq \sin(t) \leq 1$ ist $(\sin(t))^k \leq 1$ und somit $2-(\sin(t))^k \geq 1 \ \forall t \in \mathbb{R}$. Also ist f_k für alle $k \in \mathbb{N}$ wohldefiniert.
Als Komposition stetiger Funktionen ist f_k stetig.
Da $\partial_y f_k = \frac{\cos(t)}{2-(\sin(t))^k}(-ky^{k-1})$ aus diesen Gründen ebenfalls stetig ist, ist f_k lokal Lipschitz-stetig bezüglich y.
Da der Definitionsbereich in der Aufgabe nicht weiter eingeschränkt wurde liegt $(0,1)$ in diesem.
Somit folgt die Behauptung aus dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz.

b)

Zunächst soll der Hinweis gezeigt werden:
Wegen $f_k(t, \sqrt[k]{2}) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$ ist $\alpha_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\alpha_k(t) = \sqrt[k]{2}$ eine konstante Lösung der DGL.
Weiterhin ist $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\beta(t) = \sin(t)$ auch eine Lösung der DGL, denn $\beta'(t) = \cos(t) = \frac{\cos(t)}{2-(\sin(t))^k}(2-(\sin(t))^k) = \frac{\cos(t)}{2-(\sin(t))^k}(2-(\beta(t))^k)$.
Da $0 = \beta(0) < \varphi_k(t) = 1 < \alpha_k(t) = \sqrt[k]{2}$ gilt und Lösungskurven einer DGL sich nicht schneiden, gilt $\beta(0) < \varphi_k(t) < \alpha_k(t) \ \forall t \in I_k$.

Sei $I_k = (t_-, t_+)$ das Existenzintervall der Lösung φ_k.
Da $\varphi_k(t) > \beta(t) \ \forall t \in (t_-, t_+)$ gilt $\lim\limits_{t \downarrow t_-} \varphi_k(t) \neq -\infty$ und $\lim\limits_{t \uparrow t_+} \varphi_k(t) \neq -\infty$.
Wegwn $\varphi_k(t) < \alpha_k(t) \ \forall t \in (t_-, t_+)$ gilt $\lim\limits_{t \downarrow t_-} \varphi_k(t) \neq \infty$ und $\lim\limits_{t \uparrow t_+} \varphi_k(t) \neq \infty$.
Aus dem Satz über das Randverhalten folgt nun, dass $I_k = \mathbb{R}$.

c)

Wir verwenden Trennung der Variablen:

$$\int_1^y \frac{1}{2-w}\,\mathrm{d}w = \int_0^t \frac{\cos(s)}{2-\sin(s)}\,\mathrm{d}s \qquad \text{Substitution } u = 2-\sin(s),\ \mathrm{d}u = -\cos(s)\,\mathrm{d}s$$

$$[-\ln(2-w)]_1^y = \int_2^{2-\sin(t)} -\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = [-\ln(u)]_2^{2-\sin(t)} \quad \Rightarrow \quad \ln(2-y) = \ln\left(\tfrac{2-\sin(t)}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad y = \tfrac{\sin(t)+2}{2}$$

Probe: $\varphi_1(0) = \frac{\sin(0)-2}{2} = 1$, $\varphi_1'(t) = \frac{\cos(t)}{2} = \frac{\cos(t)}{2-\sin(t)}\frac{2-\sin(t)}{2} = \frac{\cos(t)}{2-\sin(t)}(2-\varphi_1(t))$, passt.