Frühjahr 25 Themennummer 2 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Bestimmen Sie die Laurentreihe im Entwicklungspunkt $-\pi/2$ der Funktion

$$f : \mathbb{C}\backslash\{-\pi/2\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{z\cos(z)}{(z+\pi/2)^3}$$

und geben Sie den größten Kreisring an, auf dem diese Laurentreihe konvergiert. Bestimmen Sie weiter das Residuum von f im Punkt $-\pi/2$.
Hinweis: Identitäten zwischen den trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus können hilfreich sein.

b) Sei $B(81{,}25) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 81| < 25\}$. Bestimmen Sie den Wert des Integrals

$$\int_{\partial B(81,25)} \frac{\exp\left(\frac{z^2}{z+2025}\right)}{2025 + z^2} \mathrm{d}z \ .$$

Dabei ist der Rand im mathematisch positiven Sinn orientiert und wird einmal durchlaufen.

Lösungsvorschlag:

a) Es ist $\cos(z) = \cos(z + \pi/2 - \pi/2) = \cos(z+\pi/2)\cos(\pi/2) + \sin(z+\pi/2)\sin(\pi/2)$ nach dem Additionstheorem, womit wir aus $\cos(\pi/2) = 0$ und $\sin(\pi/2) = 1$ dann $\cos(z) = \sin(z+\pi/2)$ erhalten. Daher ist $f(z) = \frac{(z+\pi/2)\sin(z+\pi/2) - \pi/2\sin(z+\pi/2)}{(z+\pi/2)^3}$. Setzen wir $\sin(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ein, so ergibt sich

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z+\pi/2)^{2n-1}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \pi/2(-1)^{n+1}\frac{(z+\pi/2)^{2n-2}}{(2n+1)!}$$

für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\{-\pi/2\}$, was insbesondere der gesuchte größte Kreisring ist.
Das Residuum von f am Punkt $-\pi/2$ ist der Koeffizient von $\frac{1}{z+\pi/2}$, also 1.

b) Der Integrand ist holomorph auf der Menge $\mathbb{C}\backslash\{-2025, 45i, -45i\}$, also auch auf der offenen, konvexen Teilmenge $B_{30}(81)$, denn $|81-(-2025)| = 2106 > 30$, $|81 \mp 45i| \geq 81 > 30$. Der Integrationsweg kann durch eine glatte, geschlossene Kurve beschrieben werden mittels $[0, 2\pi] \ni t \mapsto 81 + 25e^{it}$ welche vollständig in der Menge $B_{30}(81)$ verläuft. Nach Cauchys Integralsatz ist der Wert des Integrals 0.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$