Frühjahr 2025 Thema 1 Aufgabe 5

mks

7. Mai 2025

Für $\alpha > 0$ bezeichne

$$f_\alpha : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f_\alpha(t, x) := x^\alpha \cos(t)$$

Geben Sie die Teilmenge $A \subseteq (0, \infty)$ an, die genau aus den $\alpha > 0$ besteht, für die das Anfangswertproblem

$$(\mathrm{AWP}_\alpha) \quad \dot{x} = f_\alpha(t, x), \quad x(0) = 1,$$

genau eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung besitzt. Weisen Sie Ihr Ergebnis nach, indem Sie

a) Für alle $\alpha \in A$ die Lösung explizit bestimmen und deren Eindeutigkeit begründen,

b) für alle $\alpha \in (0, \infty) \backslash A$ zeigen, dass keine Lösung auf $\mathbb{R}$ existieren kann oder dass es mindestens zwei verschiedene auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösungen gibt.

Lösung:

a)

Sei $\alpha > 0$ beliebig. Da f_α ein Produkt von stetigen Funktionen ist, ist f_α stetig.
Weiterhin ist aus diesem Grund auch $\partial_x f_\alpha(t, x) = \alpha x^{\alpha-1} \cos(t)$ stetig auf $D = (0, \infty) \times \mathbb{R}$. Dies zeigt, dass f_α lokal Lipschitz-stetig bezüglich x ist.
Mit dem globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz folgt dann, dass das AWP für jedes $\alpha > 0$ eine eindeutige maximale Lösung $x_\alpha : (t_{-,\alpha}, t_{+,\alpha}) \to \mathbb{R}$ besitzt mit $-\infty \leq t_{-,\alpha} < 0 < t_{+,\alpha} \leq \infty$.

Nach dem Hinweis betrachten wir zunächst $\alpha = 1$.
Wir bestimmen die maximale Lösung x_1 mit Trennung der Variablen.
$\int_1^x \frac{1}{s} \,\mathrm{d}s = \int_0^t \cos(w) \,\mathrm{d}w \quad \Rightarrow \quad \ln(x) - \ln(1) = \sin(t) - \sin(0) \quad \Rightarrow \quad x_1(t) = e^{\sin(t)}$
Probe für $\alpha = 1$: $x_1(0) = e^{\sin(0)} = e^0 = 1, \quad x_1'(t) = e^{\sin(t)} \cos(t) = x_1(t) \cos(t) \; \forall t \in \mathbb{R}$, passt.
Da x_1 auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist gilt $1 \in A$.

Sei nun $\alpha \neq 1$.
Wir verwenden erneut Trennung der Variablen zur Lösung des AWP.
$\int_1^x s^{-\alpha} \,\mathrm{d}s = \int_0^t \cos(w) \,\mathrm{d}w \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1-\alpha}(x^{1-\alpha} - 1^{1-\alpha}) = \sin(t) \quad \Rightarrow \quad x_\alpha(t) = ((1-\alpha)\sin(t) + 1)^{\frac{1}{1-\alpha}}$
Wir zeigen zunächst, dass $x_\alpha \; \forall \alpha \in (0, 2) \backslash \{1\}$ wohldefiniert ist.
Für kein $\alpha \in (0, \infty) \backslash \{1\}$ ist $\frac{1}{1-\alpha} \in \mathbb{Z}$. Es ist also zu zeigen, dass $(1-\alpha)\sin(t) + 1 > 0$ ist $\forall t \in \mathbb{R}$.
Für $\alpha \in (0, 1)$ ist $1 > 1 - \alpha > 0$. Es folgt (1-α)sin(t) $\geq -1(1-\alpha) > -1$ und somit $(1-\alpha)\sin(t) + 1 > 0$.
Für $\alpha \in (1, 2)$ ist $-1 < 1 - \alpha < 0$. Es folgt $(1-\alpha)\sin(t) \geq (1-\alpha)1 > -1$ und somit $(1-\alpha)\sin(t) + 1 > 0$.
Probe für $\alpha \neq 1$: $x_\alpha(0) = 1^{1-\alpha} = 1$,
$x_\alpha'(t) = \frac{1}{1-\alpha}((1-\alpha)\sin(t) + 1)^{\frac{1}{1-\alpha} - 1}(1-\alpha)\cos(t) = ((1-\alpha)\sin(t) + 1)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cos(t) = (x_\alpha(t))^\alpha \cos(t) \; \forall t \in \mathbb{R} \, (+)$, passt.
Somit ist gezeigt $(0, 2) \subseteq A$.

b)

Sei nun $\alpha \geq 2$.
Wir haben gezeigt, dass es eine eindeutige maximale Lösung des AWP, $x_\alpha : (t_{-,\alpha}, t_{+,\alpha}) \to \mathbb{R}$ gibt.
Die Rechnung $(+)$ gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $(1-\alpha)\sin(t) + 1 > 0$.
Das bedeutet, dass $(t_{-,\alpha}, t_{+,\alpha})$ das maximale Intervall ist, dass die 0 enthält und für das x_α wohldefiniert ist, also

$(1-\alpha)\sin(t)+1>0\,\forall t\in(t_{-,\alpha},t_{+,\alpha})$.
Für $\alpha\geq 2$ gilt $1-\alpha\geq -1$ und somit existieren $t^*\in\mathbb{R}$ mit $(1-\alpha)\sin(t^*)+1+1<0$. Dort ist x_α also nicht definiert und es folgt, dass $t_{-\alpha}>-\infty$ oder $t_{+,\alpha}<\infty$.
Damit ist gezeigt, dass für $\alpha\geq 2$ $\alpha\notin A$ und somit $A=(0,2)$.