**Frühjahr 25 Themennummer 1 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)**

Für $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ betrachten wir auf $\mathbb{R}$ die reellwertige Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) \quad \text{für} \quad F(x) = b + 2ax - cx^2.$$

a) Bestimmen Sie die Ruhelagen dieser Differentialgleichung in Abhängigkeit von $a, b, c$.

b) Zeigen Sie, dass für $a^2 + bc < 0$ das zugehörige Anfangswertproblem mit $x(0) = 2$ keine Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ besitzt.

c) Seien $b$ und $c$ so gewählt, dass $x_0 = 2$ eine Ruhelage ist mit $F'(2) \neq 0$. Bestimmen Sie, für welche Werte des Parameters $a$ diese Ruhelage stabil bzw. asymptotisch stabil ist.

**Lösungsvorschlag:**

a) Wir müssen einige Fälle unterscheiden. Falls $c = 0$ ist, existiert genau dann eine Ruhelage, wenn $a \neq 0$ ist. In diesem Fall ist $-\frac{b}{2a}$ die eindeutige Ruhelage. Für $c \neq 0$ existieren genau dann Ruhelagen, wenn $a^2 + bc \geq 0$ ist. In diesem Fall sind die Ruhelagen $\frac{a \mp \sqrt{a^2+bc}}{c}$.

b) Die Strukturfunktion ist als Polynom stetig differenzierbar und lokal lipschitzstetig. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf ist die Lösung zum Anfangswert $x(0) = 2$ auf einem offenen Intervall $J$ um 0 eindeutig bestimmt und kann nicht fortgesetzt werden.
$F$ ist nullstellenfrei nach a), das Vorzeichen erhalten wir durch das Verhalten für $x \to \infty$, welches durch den Leitkoeffizienten $-c$ vorgegeben wird. Für $c < 0$ ist $F > 0$ und $x$ streng monoton wachsend auf dem maximalen Existenzintervall; für $c > 0$ ist $F < 0$ und $x$ streng monoton fallend auf dem maximalen Existenzintervall. Wir zeigen, dass $J$ für $c < 0$ nach oben beschränkt ist. Für alle $t \geq 0$ mit $t \in J$ ist

$$\int_2^{x(t)} \frac{1}{F(s)} \,\mathrm{d}s = \int_0^t 1 \,\mathrm{d}s = t$$

nach Trennung der Variablen. Das Integral auf der linken Seite ist wohldefiniert und für alle $t \in J, t \geq 0$ wegen $x(t) \geq 2$ nach oben gegen $\int_2^\infty \frac{1}{F(s)} \,\mathrm{d}s$ beschränkt. Dieses ist endlich, da $F$ ein Polynom zweiten Grades ist. (Wir können ein $C > 0$ finden, sodass $F(x)$ nach unten auf $[C, \infty)$ gegen $-\frac{c}{2}x^2$ beschränkt ist. Auf $[C, \infty)$ stellt $-\frac{2}{cx^2}$ eine Majorante dar, deren Integral wegen $\int_C^\infty -\frac{2}{cx^2} \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{cC} < \infty$ endlich ist. Auf $[0, C]$ ist das Integral endlich, weil der Integrand stetig ist.) Damit gilt dann $t \leq \int_2^\infty \frac{1}{F(s)} \,\mathrm{d}s < \infty$ für $t \in J (t \geq 0)$ und $J$ ist beschränkt gegen dieses Integral, also nicht ganz $\mathbb{R}$. Analog zeigt man für $c > 0$, dass $J$ nach unten beschränkt ist.

c) Es ist $F'(2) = 2(a-c) \neq 0$, also $a \neq c$. Die Ruhelage ist nach dem Linearisierungssatz (asymptotisch) stabil, wenn $F'(2) < 0 \iff a < c$ ist und instabil, wenn $F'(2) > 0 \iff a > c$ ist. Dies gilt unabhängig von $b \in \mathbb{R}$ und wegen $a \neq c$ ist $(a, b, c) \neq (0,0,0)$.

$\mathcal{J.F.B.}$