Frühjahr 25 Themennummer 1 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Wir betrachten die holomorphe Funktion

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Zeigen Sie:

a) $f(z + \pi i) = -f(z)$ und $f(z + 2\pi i) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

b) f ist surjektiv.

c) Für ein festes $w \in \mathbb{C}$ haben die Lösungen der Gleichung $f(z) = w$ für jedes $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $f(z_0) = w$ die Form
$$z = \pm z_0 + 2\pi i n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

d) $f(\mathbb{R}) = [1, \infty)$ und $f(\mathbb{R} + \pi i) = (-\infty, 1]$.

e) f bildet den Streifen $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Im } z < \pi\}$ biholomorph auf das Gebiet
$$\Omega := \mathbb{C} \backslash ((-\infty, -1] \cup [1, \infty))$$
ab.

Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass Abbildungen, die holomorph und bijektiv sind, biholomorph sind.

Lösungsvorschlag:

a) Nach der Eulerformel gilt für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$ in Normaldarstellung, dass $\exp(z + \pi i) = e^x(\cos(y + \pi) + i \sin(y + \pi)) = e^x(-\cos(y) - i \sin(y)) = -e^z$. Daraus folgt $\exp(z + \pi i) = -\exp(z)$ und $-\exp(z) = -\exp(z - \pi i + \pi i) = \exp(z - \pi i)$, also $\cosh(z + \pi i) = \frac{e^{z+\pi i} + e^{-z-\pi i}}{2} = \frac{-e^z - e^{-z}}{2} = -\cosh(z)$ und durch zweimalige Anwendung $\cosh(z + 2\pi i) = \cosh(z + \pi i + \pi i) = -\cosh(z + \pi i) = \cosh(z)$.

b) Sei $w \in \mathbb{C}$, dann ist $\cosh z = w \iff (e^z)^2 - 2we^z + 1 = 0$. Das Polynom $p(x) = x^2 - 2wx + 1$ besitzt nach dem Fundamentalsatz der Algebra mindestens eine Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$. Wegen $p(0) = 1 \neq 0$ ist $z_0 \neq 0$ und es gibt ein $w_0 \in \mathbb{C}$ mit $z_0 = \exp(w_0)$ und folglich $\cosh(w_0) = w$, also ist cosh surjektiv.

c) Seien w, z_0 wie angegeben. Es gilt $f(z) = f(z_0) \iff (e^z)^2 - (e^{z_0} + e^{-z_0})e^z + 1 = 0$. Für jedes $z_0 \in \mathbb{C}$ hat das Polynom $q(t) = t^2 - 2\cosh(z_0)t + 1$ genau die zwei Nullstellen $e^{\pm z_0}$ nach der Lösungsformel. Mit den Eigenschaften von exp gilt $\cosh(z) = w \iff q(e^z) = 0 \iff e^z = e^{\pm z_0} \iff z = \pm z_0 + 2\pi i n, n \in \mathbb{Z}$.

d) Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t)$ ist glatt mit $g'(t) = \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ und $g''(t) = g(t)$. Auf $\mathbb{R}$ ist $t \mapsto e^t$ streng monoton wachsend, also injektiv. Daher ist $g'(t) = 0 \iff e^t = e^{-t} \iff t = -t \iff t = 0$. Wegen $0 < 1 = g(0) = g''(0)$ ist 0 ein globales Minimum von g und $g(t) \geq 1$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Wegen $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) \geq$

$\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{2}e^t = \infty$, ist g unbeschränkt. Da g stetig ist, folgt $g(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}) = [1,\infty)$ aus dem Zwischenwertsatz.
Zuletzt ist $f(\mathbb{R} + \pi i) = \{f(t + \pi i) : t \in \mathbb{R}\} = \{-f(t) : t \in \mathbb{R}\} = (-\infty, -1]$.

e) Die Holomorphie und Surjektivität von $f : S \to f(S)$ ist klar, wir brauchen also nur Injektivitität und $f(S) = \Omega$ zeigen. Falls $f(w) = f(z)$ für $z, w \in S$ gilt, gibt es nach c) ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $z = -w + 2\pi i n$ oder $z = w + 2\pi i n$. Nach der Definition von S muss dann also $(0,\pi) \ni \text{Im } z = 2\pi i n - \text{Im } w \in (\pi(2n-1), 2n\pi)$ im ersten Fall gelten, was unmöglich ist (für $n \leq 0$ ist $2\pi n \leq 0$ und für $n \geq 1$ ist $(2n-1)\pi \geq \pi$). Analog erhält man aus $(0,\pi) \ni \text{Im } z = \text{Im } w + 2\pi n \in (2n\pi, \pi(2n+1))$, dass nur $n = 0$ möglich ist, woraus dann $z = w$ folgt.
Sei $w \in \Omega$, dann gibt es nach b) ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $f(z_0) = w$. Wäre $\text{Im } z_0 = n\pi$ für ein $n \in \mathbb{Z}$, so wäre nach a) und d) $f(z_0) = f(z_0 - 2\frac{n}{2}\pi i) \in [1,\infty)$ für gerades n und $f(z_0) = f(z_0 - 2\frac{n-1}{2}\pi i) \in (-\infty - 1]$ für ungerade n in jedem Fall ein Widerspruch. Sei also $n = \left\lceil \frac{\text{Im } z_0}{\pi} \right\rceil \in \mathbb{Z}$. Für gerades n ist $-z_0 + 2\frac{n}{2}\pi i \in S$ und für ungerades n ist $z_0 - 2\frac{n-1}{2}\pi i \in S$. Nach c) folgt dann $w = f(z_0) = f(z_0 - 2\frac{n-1}{2}\pi i) = f(-z_0 + 2\frac{n}{2}\pi i)$ und weil einer dieser Punkte in S liegen muss, schließlich auch $w \in f(S)$.
Sei zuletzt $t \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, dann gibt es nach d) ein $w \in \mathbb{R}$ und ein $b \in \{0{,}1\}$ mit $f(w + b\pi i) = t$. Nach c) ist dann jede Lösung von $f(z) = t$ von der Form $z = \pm w + (2n \pm b)\pi i$ mit $n \in \mathbb{Z}$, d. h. der Imaginärteil von z ist ein ganzzahliges Vielfaches von π, also z kein Element von S. Daher ist $t \notin f(S)$ und $f(S) = \Omega$.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$