Frühjahr 2025 Thema 1 Aufgabe 2

mks

6. Mai 2025

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils kurze Begründungen an (mit Nennung aller benutzten Sätze) oder ein Gegenbeispiel.

a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar. Es gelte $f(2) = 5$ und $f'(x) \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $f(5) \geq 8$

b) Es sei $f : \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} \to \mathbb{C}$ holomorph und $|f'(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Dann ist $|f(0)| \leq 1$.

c) Es sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Kurve mit $\gamma(0) = (0, 0)$ und $\gamma(1) = (2, 5)$. Dann existiert ein $t \in [0, 1]$ mit $\gamma(t) \in S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

d) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konvergiert.

e) Jede nach oben beschränkte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nimmt einen maximalen Wert an.

Lösung:

a)

Die Aussage ist wahr.
Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es ein $x_0 \in [2, 5]$ mit $f'(x_0) = \frac{f(5)-f(2)}{5-2} = \frac{f(5)-5}{3}$ Da nach Angabe gilt $f'(x) \geq 1$ muss, damit dieses x_0 existieren kann, nach umstellen also gelten $f(5) \geq 8$.

Alternative Lösung: Aus der Voraussetzung $f'(x) \geq 1$ und der Monotonie des Integrals folgt durch Integrieren über das Intervall $[2, 5]$ mit dem HDI $f(5) - f(2) \geq 3$ und damit $f(5) \geq 8$.

b)

Die Aussage ist falsch.
Ein Gegenbeispiel ist die Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C},\ f(z) = 107$.

Bemerkung: Möglicherweise ist aus Übungen bekannt, dass die Aussage für vertauschtes f und f' stimmt. Mit der verallgemeinerten Cauchy-Integralformel und der Standardabschätzung folgt
$|f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(w-z)^2}\, \mathrm{d}w \right| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|z-w|=1} \frac{|f(w)|}{|w-z|^2}\, \mathrm{d}w \leq 1.$

c)

Die Aussage ist wahr.
Wir betrachten die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(t) = ||\gamma(t)||$. Da γ und der Betrag stetig sind ist g als Verkettung stetiger Funktionen stetig. Es gilt $g(0) = 0$ und $g(1) = ||(2, 5)|| = \sqrt{29}$.
Da $0 \leq 1 \leq \sqrt{29}$ gibt es nach dem Zwischenwertsatz gibt es deshalb ein $t \in [0, 1]$ mit $g(t) = 1$. Dann ist $1 = ||\gamma(t)|| = \sqrt{\gamma_x^2(t) + \gamma_y^2(t)}$, nach quadrieren also $\gamma(t) \in S^1$.

d)

Die Aussage ist wahr.
Wir schreiben die Reihe als $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ mit $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.
Da die Wurzelfunktion stetig ist und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} = 0$. Wegen der strengen Monotonie der Wurzelfunktion und der Inversionsregel für Ungleichungen ist a_n außerdem streng monoton fallen.
Mit dem Leibnizkriterium folgt hieraus die Konvergenz der Reihe.

e)

Die Aussage ist falsch.
Ein mögliches Gegenbeispiel ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -1 & x \in (-\infty, 0] \\ -\frac{1}{x} & x \in (0, \infty) \end{cases}$$

Da alle Funktionswerte negativ sind, ist die Funktion nach oben durch die 0 beschränkt und es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$. Es gibt allerdings kein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$.

Bemerkung 1: Weitere bekannte Gegenbeispiele sind die Funktionen arctan, arccot, tanh, u.v.m.

Bemerkung 2: Nach dem Satz vom Minimum und Maximum stimmt die Aussage für kompakten Definitionsbereich.