Frühjahr 2025 Thema 1 Aufgabe 1

mks

7. Mai 2025

Wir betrachten die holomorphe Funktion

$$f : \Omega := \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{z(z-2)}{e^{2\pi i z} - 1}$$

a) Bestimmen Sie alle Singularitäten von f in $\mathbb{C}$ und geben Sie jeweils den Typ an.

b) Berechnen Sie die Residuen von f in allen Singularitäten.

c) Entscheiden Sie begründet, ob die Funktion f auf Ω eine Stammfunktion hat.

d) Sei γ der geschlossene Polygonzug, der die Punkte $\frac{3}{2}-2i, \frac{3}{2}+2i, -\frac{3}{2}-i, -\frac{3}{2}+i, \frac{3}{2}-2i$ in der angegebenen Reihenfolge geradlinig verbindet. Berechnen Sie das komplexe Wegintegral $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$. Sie dürfen die Umlaufzahl an einer Skizze ablesen.

Lösung:

a)

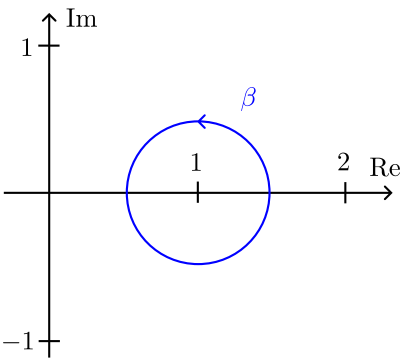
Wir setzen $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) = z(z-2)$ und $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $h(z) = e^{2\pi i z} - 1$. Da g und h ganz sind und $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, sind die Singularitäten von f genau die Nullstellen von h.
Es gilt $h(z) = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{2\pi i z} = 1 \;\Leftrightarrow z \in \mathbb{Z}$. Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt $h(n) = 0$ und $h'(n) = 2\pi i e^{2\pi i n} = 2\pi i \neq 0$. Somit ist jedes $n \in \mathbb{Z}$ eine einfache Nullstelle von h.
Die Nullstellen von g sind $z = 0$ und $z = 2$, beide einfach.
Es folgt, dass die Nullstellen $z \in \{0, 2\}$ hebbar sind und die Nullstellen $z \in \mathbb{Z}\backslash\{0, 2\}$ Pole 1. Ordnung.

b)

Sei $n \in \mathbb{Z}$. Da h eine Nullstelle 1. Ordnung hat in $z = n$ und g holomorph ist in $z = n$ gilt $\operatorname{Res}(f, n) = \operatorname{Res}(\frac{g}{h'}, n)\frac{g(n)}{h'(n)} = \frac{n(n-2)}{2\pi i}$. Insbesondere gilt $\operatorname{Res}(f, 0) = (f, 2) = 0$.

c)

Wir betrachten den Weg $\beta : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $\beta(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{2\pi i t}$ in Ω.

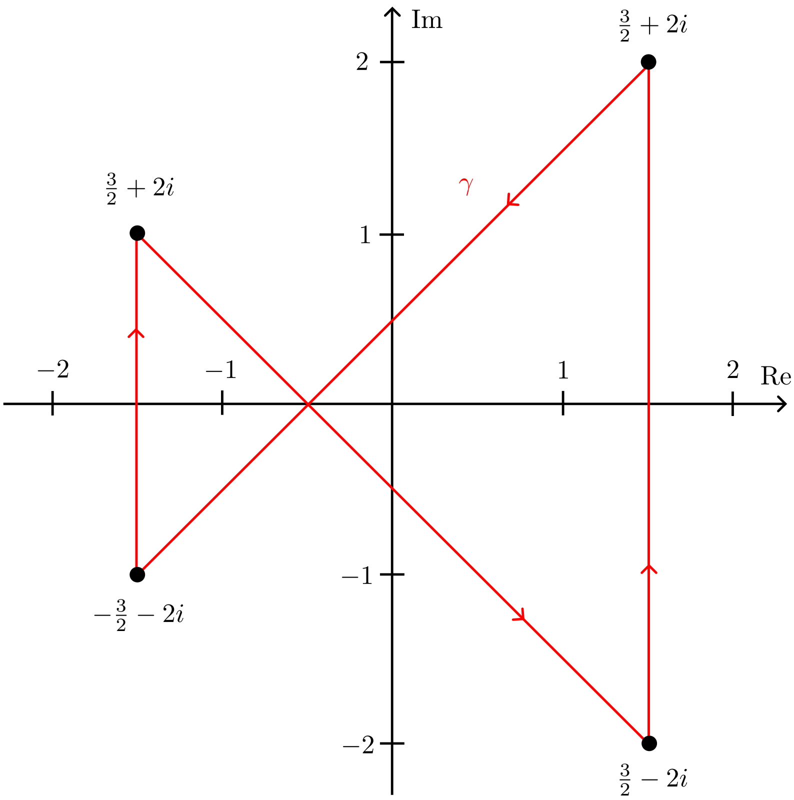


Nach dem Residuensatz gilt $\oint_\beta f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 1) = 2\pi i \frac{1(1-2)}{2\pi i} = -1$, da für die Umlaufzahl $n(\beta, a)$ von β bezüglich $a \in \mathbb{Z}$ gilt $n(\beta, a) = \begin{cases} 1 & a = 1 \\ 0 & a \in \mathbb{Z}\backslash\{1\} \end{cases}$.

Da β geschlossen ist und $\oint_\beta f(z)\,\mathrm{d}z \neq 0$ besitzt f keine Stammfunktion auf Ω.

d)

Skizze für γ:



Aus der Skizze liest man ab: $n(\gamma,0)=n(\gamma,1)=1,\ n(\gamma,-1)=-1,\ n(\gamma,a)=0$ für $a\in\mathbb{Z}\backslash\{0,\pm 1\}$.
Der Residuensatz liefert dann $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i(1\cdot 0 + 1\cdot\frac{-1}{2\pi i} + (-1)\cdot\frac{(-1)(-1-2)}{2\pi i}) = -4$.