Frühjahr 24 Themennummer 3 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Betrachten Sie das folgende Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(5+4\cos(x))}$$

a) Begründen Sie, dass dieses Integral existiert und endlich ist.

b) Begründen Sie, dass auf $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > -\ln 2\}$ durch $h(z) := 1/(2+e^{ix})$ eine holomorphe Funktion $h : H \to \mathbb{C}$ definiert wird.

c) Zeigen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ die Identität

$$\operatorname{Re}\left(\frac{4}{2+e^{ix}}\right) = 1 + \frac{3}{5+4\cos(x)}.$$

d) Zeigen Sie mittels komplexer Integration, dass das Integral den Wert $\frac{\pi}{3} \cdot \frac{2e-1}{2e+1}$ hat.

Lösungsvorschlag:

a) Der Integrand ist als Verknüpfung stetiger Funktionen eine stetige Funktion, weil der Nenner nicht verschwindet ($1+x^2 \geq 1 > 0;\ 5+4\cos(x) \geq 5-4 = 1 > 0$), also lokal integrierbar. Der Integrand ist strikt positiv und lässt sich betragsmäßig nach oben durch $\frac{1}{1+x^2}$ abschätzen (s. obige Abschätzungen). Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ ist eine konvergente Majorante, also existiert auch das zu untersuchende Integral. Es gilt nämlich, wegen $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} &= \lim_{a\to\infty} \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \lim_{b\to-\infty} \int_b^0 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\ &= \lim_{a\to\infty} \arctan a - \arctan(0) + \lim_{b\to-\infty} \arctan(0) - \arctan(b) = \pi.\end{aligned}$$

b) Die Funktion h ist eine Verknüpfung holomorpher Funktionen, also holomorph auf dem Komplement der Nullstellenmenge des Nenners. Wir zeigen, dass in H keine Nullstellen von $2+e^{iz}$ existieren, dann ist h auf H holomorph. Es gilt für alle $z = x+iy \in H : |e^{iz}| = |e^{ix-y}| = e^{\operatorname{Re}(ix-y)} = e^{-y} < e^{\ln 2} = 2$, also $e^{iz} \neq -2$ und folglich $2+e^{iz} \neq 0$.

c) Wir erweitern mit dem komplex Konjugierten des Nenners $2+e^{-ix}$ und erhalten unter Nutzung der Eulerformel

$$\frac{4}{2+e^{ix}} = \frac{8+4e^{-ix}}{(2+e^{ix})(2+e^{-ix})} = \frac{8+4e^{-ix}}{5+2(e^{ix}+e^{-ix})} = \frac{8+4\cos(x)-4i\sin(x)}{5+4\cos(x)},$$

also ist $\operatorname{Re}\left(\frac{4}{2+e^{ix}}\right) = \frac{8+4\cos(x)}{5+4\cos(x)} = 1 + \frac{3}{5+4\cos(x)}$ für $x \in \mathbb{R}$, wie zu zeigen war.

d) Wegen der Existenz des uneigentlichen Integrals, gilt $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(5+4\cos(x))} = \lim\limits_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \dfrac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(5+4\cos(x))} = \lim\limits_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \dfrac{1}{(1+z^2)(5+4\cos(z))}\mathrm{d}z$, wobei $\gamma_R : [-R, R] \to \mathbb{C},\ t \mapsto t$ ist. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $R > 1$ ist und ergänzen die Wege γ_R zu geschlossenen Kurven Γ_R, indem wir den oberen Halbkreisbogen eines Halbkreises mit Radius R und Mittelpunkt 0 hinzunehmen, d. h. mit $\tau_R : [0, \pi] \to \mathbb{C},\ t \mapsto Re^{it}$ ist $\Gamma_R = \gamma_R + \tau_R$ eine geschlossene, stückweise stetig differenzierbare Kurve in $\mathbb{C}$. Mithilfe des Residuensatzes bestimmen wir das Integral $\int_{\Gamma_R} f(z)\mathrm{d}z$ mit $f : H \to \mathbb{C},\ f(z) := \dfrac{4h(z)}{1+z^2}$. Nach Teil b) hat diese Funktion nur eine Singularität in i, weil der Zähler auf H holomorph ist und der Nenner nur die Nullstellen $\pm i$ besitzt, von denen nur i in H liegt. Die Wege Γ_R liegen für alle $R > 0$ in H und verlaufen für $R > 1$ nicht durch i, außerdem ist H offen und konvex. Für $R > 1$ umkreisen die geschlossenen Wege Γ_R die Singularität i genau einmal in positivem Umlaufsinn, nach dem Residuensatz gilt also $\int_{\Gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \ \mathrm{Res}_f(i)$, wir bestimmen noch das Residuum. Weil der Zähler bei i nicht verschwindet (h und damit $4h$ haben keine Nullstellen) und der Nenner bei i eine einfache Nullstelle besitzt ist i Pol erster Ordnung und das Residuum ist gegeben durch $f(z)(z-i)|_{z=i} = \dfrac{f(i)}{i+i} = \dfrac{4}{2i(2+\frac{1}{e})}$, also ist das Integral

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \ \mathrm{Res}_f(i) = \frac{4\pi e}{2e+1}.$$

Wir stellen außerdem fest, dass

$$0 \le \left| \int_{\tau_R} f(z)\mathrm{d}z \right| \le |\tau_R| \max_{z\in \mathrm{Spur}(\tau_R)} |f(z)| = \frac{4\pi R}{R^2-1}$$

gilt, was für $R \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Dabei wurde zweimal die umgekehrte Dreiecksungleichung und die Eigenschaft $|e^{iz}| = e^{-\mathrm{Im}(z)}$ für $z \in \mathbb{C}$ benutzt (siehe a)). Etwas genauer: Für $z \in \mathrm{Spur}(\tau_R)$ gilt $\mathrm{Im}(z) \ge 0$, also $|e^{iz}| \le 1$ und somit $|2 + e^{iz}| \ge 2 - |e^{iz}| \ge 1$ und $|z| = R$ und folglich $|1 + z^2| \ge |z|^2 - 1 = R^2 - 1$. Außerdem beträgt der Umfang eines Halbkreises mit Radius R genau πR. Daher ist $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = \lim\limits_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = \dfrac{4\pi e}{2e+1}$. Weil die Realteilabbildung $\mathbb{R}$-linear und stetig ist folgt außerdem

$$\mathrm{Re}\left(\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z\right) = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \mathrm{Re}(f(z))\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} + \frac{3}{(5+4\cos(x))(1+x^2)}\mathrm{d}x$$

unter Benutzung von c). Das Integral über den ersten Summanden haben wir in a) berechnet und erhalten durch Umstellen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(5+4\cos(x))} = \frac{1}{3}\left(\mathrm{Re}\left(\frac{4\pi e}{2e+1}\right) - \pi\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{2e-1}{2e+1}$$

und die Aussage ist gezeigt.

J.F.B.