Frühjahr 24 Themennummer 3 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Wir betrachten das zweidimensionale Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = -y\sin(x) - x$$
$$\dot{y} = x\sin(x)$$

a) Zeigen Sie, dass das zugehörige Anfangswertproblem mit

$$x(0) = 1, y(0) = 0$$

eine eindeutige auf ganz $\mathbb{R}$ existierende Lösung besitzt.
Hinweis: Die rechte Seite der Differentialgleichung lässt sich gut abschätzen.

b) Sei $z = (x, y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Lösung des Anfangswertproblems aus Teilaufgabe a). Zeigen Sie, dass $\|z(1)\|_2 \leq 1$. Hierbei bezeichnet $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^2$.

c) Sei $z = (x, y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Lösung des Anfangswertproblems aus Teilaufgabe a). Zeigen Sie, dass sogar $\|z(1)\|_2 < 1$.

Lösungsvorschlag:

a) Die Strukturfunktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, g(x, y) = (-y\sin(x) - x, x\sin(x))^{\mathrm{T}}$ ist stetig differenzierbar, also lokal Lipschitzstetig. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf existiert zu jeder Anfangsbedingung eine eindeutige maximale Lösung. Um zu zeigen, dass diese auf $\mathbb{R}$ existiert, schätzen wir ab. Es gilt

$$\|g(x, y)\|_2^2 \leq |y|^2 + |x|^2 + |x|^2 \leq 2\,\|(x, y)\|_2^2\,,$$

weil die Sinusfunktion betragsmäßig durch 1 beschränkt ist. Radizieren liefert $\|g(x, y)\|_2 \leq \sqrt{2}\,\|(x, y)\|_2$, also ist das Wachstum linear beschränkt und die Maximallösung existiert global.

b) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(t) := x(t)^2 + y(t)^2 = \|z(t)\|_2^2$. Es gilt $f' = 2(x\dot{x} + y\dot{y}) = 2(-xy\sin(x) - x^2 + xy\sin(x)) = -2x^2 \leq 0$, also ist f eine monoton fallende Funktion. Insbesondere folgt $\|z(1)\|_2^2 = f(1) \leq f(0) = \|z(0)\|_2^2 = 1^2 + 0^2 = 1$. Radizieren liefert die Behauptung, weil die Wurzelfunktion auf $[0, \infty)$ monoton wächst.

c) Angenommen es würde $\|z(1)\|_2 = 1$ gelten, dann wäre $f(0) = 1 = f(1)$ und aus der Monotonie von f würde folgen $1 = f(0) \geq f(t) \geq f(1) = 1$, also $f(t) = 1$ für alle $t \in [0{,}1]$. Damit wäre $0 = f'(t) = -2x(t)^2$ für alle $t \in [0{,}1]$, also auch $\dot{x}(t) = 0$ für alle $t \in [0{,}1]$. Damit wäre x auf $[0{,}1]$ konstant $x(0) = 1$. Für alle $t \in [0{,}1]$ folgt dann aus $1 = f(t) = 1^2 + y(t)^2$ auch $y(t) = 0$ und folglich $\dot{y}(t) = 0$ für alle $t \in [0{,}1]$. Dies liefert aber einen Widerspruch zur Differentialgleichung, weil $\dot{y}(\frac{1}{2}) = 0 \neq \sin(1) = x(\frac{1}{2})\sin(x(\frac{1}{2}))$ gilt. Die Annahme war also falsch und mit b) folgt die strikte Ungleichung.

$\mathcal{J.F.B.}$