Frühjahr 24 Themennummer 3 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

a) $f(0) = 1$ und $\operatorname{Re} f(z) \geq 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ bzw.

b) $g'(z) = g(z)^2$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Lösungsvorschlag:

a) Ist f holomorph mit den gesuchten Eigenschaften, so ist $h(z) = \exp(-f(z))$ ebenfalls holomorph, also ganz. Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt nun $|h(z)| = |\exp(-f(z))| = \exp(\operatorname{Re}(-f(z))) = \exp(-\operatorname{Re} f(z)) \leq \exp(-1)$, d. h. h ist beschränkt und nach dem Satz von Liouville somit konstant. Daher ist die Ableitung konstant 0 und wir folgern $0 = h'(z) = -f'(z)\exp(-f(z))$, also $0 = f'(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Damit ist auch f konstant und für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt bereits $f(z) = f(0) = 1$. Daher ist $f \equiv 1$ die einzige Funktion mit den gesuchten Eigenschaften.

b) Weil g ganz ist, können wir g in eine auf $\mathbb{C}$ konvergente Potenzreihe um 0 entwickeln, d. h. $a_n \in \mathbb{C}$ finden mit $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Mit dem Cauchyprodukt und der gliedweisen Differentiation folgt aus der Voraussetzung

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n = g'(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k})z^n$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ und aus dem Identitätssatz schließlich $(n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \iff a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen induktiv, dass $a_n = a_0^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Für $n = 0$ ist das trivialerweise erfüllt und der Induktionsanfang gezeigt. Wir nehmen nun an, dass für ein $n \in \mathbb{N}_0$ die Formel für alle $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ gilt und zeigen als Induktionsschritt die Formel für $n+1$:

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_0^{k+1}a_0^{n-k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_0^{n+2} = \frac{a_0^{n+2}}{n+1}\sum_{k=0}^{n} 1 = a_0^{n+2}.$$

Daraus folgt $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_0^{n+1} z^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty}(a_0 z)^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Dies ist eine geometrische Reihe und konvergiert genau dann, wenn $|a_0 z| < 1$ gilt. Nach unserer Annahme muss die Reihe aber für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergieren, dies ist nur für $a_0 = 0$ möglich, denn ist $a_0 \neq 0$ so ist für $z = \frac{1}{a_0}$ $|a_0 \cdot \frac{1}{a_0}| = |1| = 1$. Daraus folgt insbesondere $g(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $g \equiv 0$ ist die einzige Funktion mit den gesuchten Eigenschaften.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$