Aufgabenstellung und Lösung

Es ist die folgende Aufgabe zu lösen:

Es sei die Funktion $f : (0, \infty)^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$(t, x) \mapsto \frac{x \ln(x)}{t}$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $(\tau, \xi) \in (0, \infty)^2$ das Anfangswertproblem

$$x' = f(t, x), \quad x(\tau) = \xi$$

eine eindeutige, maximale Lösung $\lambda_{(\tau,\xi)} : I_{(\tau,\xi)} \to \mathbb{R}$ besitzt.

(b) Bestimmen Sie für jedes $\xi \in (0, \infty)$ die maximale Lösung $\lambda_{(1,\xi)}$ von

$$x' = f(t, x), \quad x(1) = \xi.$$

(c) Zeigen Sie, dass die Lösung $\lambda_{(1,\mathrm{e})}$ eine positive untere Schranke besitzt.

Lösungsvorschlag: Teilaufgabe (a): Die rechte Seite der Differentialgleichung, $f(t, x)$, ist stetig auf $(0, \infty)^2$ und nach x stetig partiell differenzierbar mit

$$\partial_x f(t, x) = \frac{\ln(x) + 1}{t}$$

und damit insbesondere auch lokal Lipschitz-stetig in x. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf hat das gegebene Anfangswertproblem also für jedes $(\tau, \xi) \in (0, \infty)^2$ eine eindeutige, maximale Lösung $\lambda_{(\tau,\xi)} : I_{(\tau,\xi)} \to \mathbb{R}$.

Teilaufgabe (b): Wir betrachten nun den Fall $\tau = 1$. Eine Lösung bestimmen wir mit folgender Nebenrechung via *Trennung der Variablen*:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\ln(x) + 1}{t} \leftrightsquigarrow \frac{\mathrm{d}x}{\ln(x) + 1} = \frac{\mathrm{d}t}{t} \leftrightsquigarrow \int_{x(0)=\xi}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}y}{\ln(y) + 1} = \int_{\tau=1}^{t} \frac{\mathrm{d}s}{s}$$

$$\overset{\text{Subst.}}{\iff} \int_{\ln(\xi)}^{\ln(x(t))} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_{\tau=1}^{t} \frac{\mathrm{d}s}{s} \iff \big[\ln(u)\big]_{u=\ln(\xi)}^{u=\ln(x(t))} = \big[\ln(s)\big]_{s=1}^{s=t}$$

$$\iff \ln(\ln(x(t))) - \ln(\ln(\xi) = \ln(t) \iff x(t) = \exp\Big[\exp\big(\ln(t) + \ln(\ln(\xi))\big)\Big],$$

wobei wir die Substitution $u := \ln(y)$ verwendet haben. Durch Umformungen ergibt sich nun

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp\Big[\exp\big(\ln(t) + \ln(\ln(\xi))\big)\Big] = \exp\Big[\exp\big(\ln(t)\big) \cdot \exp\big(\ln(\ln(\xi))\big)\Big] \\ &= \exp\big(t \cdot \ln(\xi)\big) \quad \text{für alle } t \in (0, \infty). \end{aligned}$$

Unser gefundener Kandidat für eine Lösung obigen Problems ist also

$$\lambda_{(1,\xi)} : (0, \infty) \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \lambda_{(1,\xi)}(t) = \exp\big(t \cdot \ln(\xi)\big).$$

Dass dieser Kandidat auch tatsächlich eine Lösung des gegebenen Anfangswertproblems ist, rechnet man leicht nach. Es ist $\lambda_{(1,\xi)}(1) = \exp\big(1 \cdot \ln(\xi)\big) = \xi$ sowie weiter einerseits $\lambda'_{(1,\xi)}(t) = \exp\big(t \cdot \ln(\xi)\big) \cdot \ln(\xi)$ und andererseits

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{(1,\xi)}(t) \cdot \ln\big(\lambda_{(1,\xi)}(t)\big)}{t} &= \frac{1}{t}\Big[\exp\big(t \cdot \ln(\xi)\big) \cdot \ln\big(\exp\big(t \cdot \ln(\xi)\big)\big)\Big] \\ &= \frac{1}{t}\Big[\exp\big(t \cdot \ln(\xi)\big) \cdot t \cdot \ln(\xi)\Big] \\ &= \exp\big(t \cdot \ln(\xi)\big) \cdot \ln(\xi) = \lambda'_{(1,\xi)}(t). \end{aligned}$$

Also passts und wir haben in der Tat eine Lösung für das gegebene Anfangswertproblem gefunden.

Teilaufgabe (c): Für $\xi = \mathrm{e}$ gilt

$$\lambda_{(1,\mathrm{e})}(t) = \exp\big(t \cdot \ln(\mathrm{e})\big) = \exp(t \cdot 1) = \exp(t) \geq \exp(0) = 1 > 0$$

für alle $t \in (0, \infty)$. Das ist die Behauptung.

$\mathcal{J.S.}$