Frühjahr 24 Themennummer 3 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Gegeben Seien eine Zahlenfolge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C}$. Geben Sie eine Definition dafür an, dass $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert, ohne den Konvergenzbegriff in $\mathbb{R}$ zu verwenden.

b) Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $a_k = b_k + ic_k$ mit $b_k, c_k \in \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$. Geben Sie an, welche Beziehung zwischen der Konvergenz der Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und der Konvergenz der beiden Folgen $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}, (c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ besteht. Beweisen Sie diese Beziehung unter Verwendung der Definition aus Teilaufgabe a).

c) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\text{(i)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+ik^2}{2k^3+\cos(k)} \qquad \text{(ii)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(k)+\sin(2k)}{(4-\cos(2k))^k}$$

Lösungsvorschlag:

a) $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvrgiert genau dann gegen a, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $K \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq K$ die Ungleichung $|a_k - a| < \varepsilon$ erfüllt ist. In Quantoren:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = a \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists K \in \mathbb{N} \; \forall k \in \mathbb{N}, k \geq K : |a_k - a| < \varepsilon.$$

b) Sei $a = b + ic \in \mathbb{C}$, dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} a_k = a \iff \lim_{k\to\infty} b_k = b \text{ und } \lim_{k\to\infty} c_k = c.$$

Um das zu beweisen, wiederholen wir drei wichtige Ungleichungen. Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|, |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|, |z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|.$$

Weil $\sqrt{\cdot}$ auf $[0,\infty)$ streng monoton wachsend ist, folgt für alle $z \in \mathbb{C} : |z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} \geq \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2} = |\mathrm{Re}(z)|$ und $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} \geq \sqrt{\mathrm{Im}(z)^2} = |\mathrm{Im}(z)|$. Außerdem folgt daraus $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} \leq \sqrt{|\mathrm{Re}(z)|^2 + |\mathrm{Im}(z)|^2 + 2|\mathrm{Re}(z)||\mathrm{Im}(z)|} = \sqrt{(|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|)^2} = ||\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|| = |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$.

Nun zur eigentlichen Aufgabe. " $\implies$: " Sei $\varepsilon > 0$, dann gibt es $K \in \mathbb{N}$ sodass für $k \in \mathbb{N}$ gilt $k \geq K \implies |a_k - a| = |(b_k - b) + i(c_k - c)| < \varepsilon$, also auch $|b_k - b| < \varepsilon$ und $|c_k - c| < \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq K$. Daher konvergiert b_k gegen b und c_k gegen c.
" $\impliedby$: " Sei $\varepsilon > 0$, dann ist $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ und es gibt $K, K' \in \mathbb{N}$ sodass für alle $k \in \mathbb{N}$ die Implikationen $k \geq K \implies |b_k - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $k \geq K' \implies |c_k - c| < \frac{\varepsilon}{2}$ gelten. Für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq \max\{K, K'\} \in \mathbb{N}$ folgt dann $|a_k - a| \leq |b_k - b| + |c_k - c| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Also konvergiert a_k gegen a.

c) (i): Die Reihe konvergiert per Definitionem genau dann, wenn die Folge ihrer Partialsummen konvergiert. Dies ist eine komplexe Folge, die nach b) genau dann konvergiert, wenn die Folge der Real- und Imaginärteile der Partialsummen konvergiert. Das wiederum ist äquivalent zur Konvergenz der beiden Reihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k^3+\cos(k)}$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2k^3+\cos(k)}$. Wir werden zeigen, dass die zweite Reihe divergiert, daher divergiert auch die zu untersuchende Reihe.
Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{k^2}{2k^3+\cos(k)} \geq \frac{k^2}{2k^3+1} \geq \frac{k^2}{2k^3+k^3} = \frac{1}{3k}.$$

Nach dem Majoranten- und Minorantenkriterium divergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2k^3+\cos(k)}$, weil $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k}$ eine harmonische Reihe ist und folglich divergiert. Daher divergiert auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k+ik^2}{2k^3+\cos(k)}$.
(ii) Diese Reihe konvergiert. Um das zu zeigen, benutzen wir wieder das Majorantenkriterium. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left|(-1)^k \frac{\cos(k)+\sin(2k)}{(4-\cos(2k))^k}\right| \leq \frac{|\cos(k)|+|\sin(2k)|}{(|4-\cos(2k))|^k} \leq \frac{2}{3^k}.$$

Also konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(k)+\sin(2k)}{(4-\cos(2k))^k}$, weil $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k}$ als geometrische Reihe mit $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ konvergiert.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$