Frühjahr 24 Themennummer 2 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Es sei $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und

$$\varphi : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$$
$$z \mapsto \begin{cases} \frac{z-1}{z+1} & \text{für } z \in \mathbb{C}\backslash\{-1\}, \\ \infty & \text{für } z = -1, \\ 1 & \text{für } z = \infty. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie mit Begründung $\varphi(\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\})$ und $\varphi(\mathbb{R})$.

b) Geben Sie für
$$U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \mathrm{Im}(z) > 0\}$$
und
$$V := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < 0, \mathrm{Im}(z) > 0\}$$
eine biholomorphe Abbildung $f : U \to V$ an und zeigen Sie, dass diese biholomorph ist.

Lösungsvorschlag:

a) $A := \varphi(\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\})$: Wegen $|-1| = 1$ gilt $\infty \in A$. Ist $z \in \mathbb{C}\backslash\{-1\}$ mit $|z| = 1$, so folgt
$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{(z-1)(\overline{z}+1)}{(z+1)(\overline{z}+1)} = \frac{|z|^2 + z - \overline{z} - 1}{|z|^2 + z + \overline{z} + 1} = \frac{2i\ \mathrm{Im}(z)}{2 + 2\mathrm{Re}(z)} = \frac{\mathrm{Im}(z)}{1 + \mathrm{Re}(z)}\ i \in \mathbb{R}\ i.$$
Wir erhalten also nur rein imaginäre Zahlen. Wir behaupten $A = \mathbb{R}\ i \cup \{\infty\}$ und haben bereits " $\subset$ " und $\infty \in A$ gezeigt. Sei nun $r \in \mathbb{R}$, wir müssen $ri \in A$ zeigen. Wir betrachten die Zahlen $z_t := e^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]\backslash\{\pi\}$, für diese gilt $|z_t| = 1, z_t \neq -1$ und $\varphi(z_t) = \frac{\sin(t)}{1+\cos(t)}i$. Die Abbildung $\tau : [0, \pi) \to \mathbb{R}, \tau(t) = \frac{\sin(t)}{1+\cos(t)}$ ist stetig als Verknüpfung stetiger Funktionen (Nenner wird nicht 0!) und erfüllt $\tau(0) = 0$ und $\lim\limits_{t\to\pi} \tau(t) = +\infty$ (l' Hospital), nach dem Zwischenwertsatz gilt also $\tau([0, \pi)) = [0, +\infty)$. Völlig analog sieht man für $\mu : (\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}, \mu(t) = \frac{\sin(t)}{1+\cos(t)}$, dass die Abbildung stetig ist, $\mu(2\pi) = 0$ und $\lim\limits_{t\to\pi} = -\infty$ ist, also $\mu((\pi, 2\pi]) = (-\infty, 0]$ gilt. Für jedes $r \in \mathbb{R}$ gibt es also ein $t \in [0, 2\pi]\backslash\{\pi\}$ mit $r = \tau(t)$ oder $r = \mu(t)$. Für dieses t gilt dann $\varphi(z_t) = ri$, womit die Behauptung bewiesen ist.
$\varphi(\mathbb{R})$: Für $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ ist $\varphi(x) \in \mathbb{R}$. Völlig analog wie oben, sieht man, dass die Funktionen $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}, g : (-\infty, -1) \to \mathbb{R}, g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ als Bildmengen $f((-1, +\infty)) = (-\infty, 1)$ und $g((-\infty, -1)) = (1, +\infty)$ erfüllen, also folgt $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}\backslash\{1\} \cup \{\infty\}$, wegen $-1 \in \mathbb{R}$.

b) Wir zeigen, dass die Funktion φ eingeschränkt auf U diese Eigenschaft hat. Es handelt sich um eine Möbiustransformation, diese sind biholomorph, wir rechnen aber trotzdem nochmal alle benötigten Eigenschaften nach. Für $z \in U$ gilt $\varphi(z) = \dfrac{|z|^2 + z - \overline{z} - 1}{|z|^2 + z + \overline{z} + 1} = \dfrac{|z|^2 - 1 + i(2\mathrm{Im}(z))}{|z|^2 + 1 + 2\mathrm{Re}(z)} = \dfrac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1 + 2\mathrm{Re}(z)} + \dfrac{i(2\mathrm{Im}(z))}{|z|^2 + 1 + 2\mathrm{Re}(z)}.$

Daher gilt $|z| < 1 \implies |z|^2 < 1 \implies \mathrm{Re}(\varphi(z)) < 0$, und $\mathrm{Im}(z) > 0 \implies \mathrm{Im}(\varphi(z)) > 0$, wobei verwendet wurde, dass $|z|^2+1+2\mathrm{Re}(z) \geq |z|^2+1-2|\mathrm{Re}(z)| \geq (|z|-1)^2 > 0$ gilt, weil $|z| \neq 1$ ist. Die Nenner haben also keine Nullstellen in U. Als Verknüpfung holomorpher Funktionen ist φ auf U holomorph, weil der Nenner keine Nullstellen in U besitzt und bildet nach den obigen Ungleichungen in V ab. Also ist $\varphi|_U : U \to V$ holomorph und injektiv. Die Mengen U und V sind beide offen. Mit den Eigenschaften der Möbiustransformationen (oder durch direktes Nachrechnen: $(\varphi(z) = x \iff z-1 = (z+1)x \iff z(1-x) = x+1 \iff z = \varphi^{-1}(z))$ erhalten wir die Umkehrfunktion von φ als $\varphi^{-1}(z) = \begin{cases} \frac{z+1}{-z+1} & \text{für } z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}, \\ \infty & \text{für } z = 1, \\ -1 & \text{für } z = \infty. \end{cases}$

Weil V die 1 nicht enthält, ist φ^{-1} auf V holomorph als Verknüpfung holomorpher Funktionen. Wir berechnen für $z \in V : \varphi^{-1}(z) = \dfrac{(z+1)(-\overline{z}+1)}{(-z+1)(-\overline{z}+1)}$
$= \dfrac{z-\overline{z}+1-|z|^2}{-z-\overline{z}+|z|^2+1} = \dfrac{1-|z|^2+i(2\mathrm{Im}(z))}{|z|^2+1-2\mathrm{Re}(z)} = \dfrac{1-|z|^2}{|z|^2+1-2\mathrm{Re}(z)} + \dfrac{i(2\mathrm{Im}(z))}{|z|^2+1-2\mathrm{Re}(z)}$.
Für die Nenner erhalten wir die Abschätzung $|z|^2+1-2\mathrm{Re}(z) \geq |z|^2+1 \geq 1 > 0$, da $\mathrm{Re}(z) < 0$ gilt. Für $z \in V$ gilt auch wieder $\mathrm{Im}(\varphi^{-1}(z)) > 0$, wir bestimmen noch

$$\begin{aligned} |\varphi^{-1}(z)|^2 &= \frac{z+1}{-z+1} \cdot \frac{\overline{z}+1}{-\overline{z}+1} = \frac{z\overline{z}+z+\overline{z}+1}{z\overline{z}-z-\overline{z}+1} \\ &= \frac{|z|^2+2\mathrm{Re}(z)+1}{|z|^2-2\mathrm{Re}(z)+1} < \frac{|z|^2-2\mathrm{Re}(z)+1}{|z|^2-2\mathrm{Re}(z)+1} = 1, \end{aligned}$$

wobei wieder die Positivität des Nenners aus vorheriger Rechnung und die Ungleichung $\mathrm{Re}(z) < 0$ benutzt wurde. Radizieren zeigt $|\varphi^{-1}(z)| < 1$ für alle $z \in V$. Das heißt, dass für $z \in V$ auch $\varphi^{-1}(z) \in U$ ist und dass $\varphi^{-1}|_V : V \to U$ holomorph ist. Wir haben für $v \in V$ also $\varphi^{-1}(v) \in U$ und $v = \varphi(\varphi^{-1}(v))$, also ist $\varphi|_U$ auch surjektiv. Damit ist $f = \varphi|_U$ eine Funktion mit den gewünschten Eigenschaften, denn es ist $f : U \to V$ holomorph und bijektiv mit Umkehrfunktion $f^{-1} = \varphi^{-1}|_V : V \to U$, die ebenfalls holomorph ist.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$