Aufgabenstellung und Lösung

Es ist die folgende Aufgabe zu lösen:

(a) Begründen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$x' = x^2, \quad x(0) = 1$$

eine eindeutige maximale Lösung besitzt und bestimmen Sie diese mitsamt ihrem maximalen Existenzintervall.

(b) Begründen Sie, dass die Differentialgleichung $x' = x^2 \cdot \sin^2(x)$ für jeden Anfangswert $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige, auf $\mathbb{R}$ definierte Lösung besitzt.

(c) Wir nennen eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vollständig*, wenn sie lokal Lipschitz-stetig ist und wenn jede maximale Lösung der Differentialgleichung $x' = f(x)$, zu beliebiger Anfangsbedingung, auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist. Entscheiden Sie mit Begründung, ob die Summe zweier vollständiger Funktionen wieder vollständig ist.
Hinweis: Teilaufgaben (a) und (b) könnten sich als nützlich erweisen.

Lösungsvorschlag: Teilaufgabe (a): Die rechte Seite der Differentialgleichung,

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(t,x) = x^2$$

ist stetig partiell differenzierbar bzgl. x und damit auch lokal Lipschitz-stetig in x. Tatsächlich ist das vorliegende Problem sogar autonom. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf hat das gegebene Anfangswertproblem also eine eindeutige maximale Lösung. Bestimmen können wir diese etwa mittels *Trennung der Variablen.* Dazu folgende informale Nebenrechnung:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 \rightsquigarrow \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \mathrm{d}t \rightsquigarrow \int_{x(0)=1}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int_0^t \mathrm{d}s \Longleftrightarrow \left[-\frac{1}{y}\right]_{y=1}^{y=x(t)} = [s]_{s=0}^{s=t},$$

woraus folgt, dass $x : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}$, $x(t) = \dfrac{1}{1-t}$ ein Kandidat für die Lösung des Anfangswertproblems ist. Dass dieser Kandidat in der Tat auch eine Lösung (und damit die eindeutige maximale Lösung) ist, kann man durch ausprobieren nachprüfen, denn es ist

$$x'(t) = \frac{0 \cdot (1-t) - (-1) \cdot 1}{(1-t)^2} = \frac{1}{(1-t)^2} = x^2(t).$$

Also haben wir die gesuchte eindeutige und maximale Lösung x gefunden.
An dieser Stelle bereits der *Hinweis*, dass die rechte Seite dieser Differentialgleichung *nicht* vollständig im Sinne von Teilaufgabe (c) ist, da sie nicht global, jedoch maximal ist.

Teilaufgabe (b): Auch bei dieser Differentialgleichung ist die rechte Seite stetig differenzierbar und damit lokal Lipschitz-stetig. Wir können spezielle, konstante Lösungen dieser Differentialgleichung sofort angeben. Diese sind für $k \in \mathbb{Z}$

$$\hat{x}_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \hat{x}_k = k\pi,$$

denn es ist für alle $k \in \mathbb{Z}$ $\quad (k\pi)^2 \cdot \sin^2(k\pi) = 0$. Ist $x(0) = x_0 \in (k\pi, (k+1)\pi$, dann gilt wegen des Vergleichsprinzips für die Lösung $x : J \to \mathbb{R}$, dass

$$k\pi = \hat{x}_k(t) < x(t) < \hat{x}_{k+1}(t) = (k+1)\pi.$$

Da die Lösung x auf J beschränkt und monoton steigend (die rechte Seite der Differentialgleichung ist stets positiv) ist, kann die Lösung x zu einer globalen Lösung fortgesetzt werden mit

$$k\pi < x(t) < (k+1)\pi$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Bildlich gesehen sind alle Lösungen entweder konstant (ganzzahlige Vielfache von π) oder zwischen zwei solchen konstanten Lösungen gefangen und damit auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzbar.
An dieser Stelle bereits der *Hinweis*, dass die rechte Seite dieser Differentialgleichung vollständig im Sinne von Teilaufgabe (c) ist.

Teilaufgabe (c): Analog zu Teilaufgabe (b) kann man zeigen, dass auch die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^2 \cdot \sin^2(x)$ vollständig ist. Entsprechende spezielle, konstante Lösungen sind hier neben der Nullfunktion die ganzzahligen Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$. Betrachte jetzt die Differentialgleichung

$$x' = x^2 \cdot \sin^2(x) + x^2 \cdot \cos^2(x) \iff x' = x^2 \cdot \big(\sin^2(x) + \cos^2(x)\big) \iff x' = x^2.$$

Offenbar ist deren rechte Seite die Summe zweier vollständiger Funktionen. In (a) haben wir allerdings gezeigt, dass $x \mapsto x^2$ *nicht* vollständig ist. Also ist die Aussage falsch.