Aufgabenstellung und Lösung

Es ist die folgende Aufgabe zu lösen:

(a) Formulieren Sie den Residuensatz.

(b) Bestimmen Sie für die durch

$$f(z) := \frac{z+2\mathrm{i}}{z^2+4} + \left(z - \frac{1}{2}\right) \exp\left(\frac{1}{z-\frac{1}{2}}\right)$$

definierte Funktion alle Singularitäten sowie deren Typ und das Residuum in jeder Singularität.

(c) Nutzen Sie die Teilaufgaben (a) und (b), um das Integral

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

zu berechnen, wobei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ durch

$$\gamma(t) := \begin{cases} -1 + \mathrm{e}^{(2\mathrm{i}t)} & t \in [0, \pi] \\ 1 - \mathrm{e}^{-2(t-\pi)\mathrm{i}} & t \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$$

gegeben ist.

Lösungsvorschlag: Teilaufgabe (a): Es seien $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter sei mit $S := \{z_1, \ldots, z_n\} \subset U^c$ die Menge der isolierten Singularitäten von f, wobei $n = |S|$ endlich ist. Sei γ ein geschlossener Weg mit $\mathrm{im}(\gamma) \subset U \setminus S$. Dann gilt für das komplexe Wegintegral

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \cdot \sum_{m=1}^{n} \eta_\gamma(z_m) \operatorname*{Res}_{z=z_m}(f(z)),$$

wobei $\eta_\gamma(z_m)$ die Windungszahl von γ um die Singularität in z_m ist.

Teilaufgabe (b): Es gilt

$$\frac{z+2\mathrm{i}}{z^2+4} = \frac{z+2\mathrm{i}}{(z+2\mathrm{i})(z-2\mathrm{i})} = \frac{1}{z-2\mathrm{i}}.$$

Für die Betrachtung der beiden isolierten Singularitäten bei $z_{1/2} = \pm 2\mathrm{i}$ von f genügt es, den ersten Summanden von f zu betrachten, denn der zweite Summand ist in einer offenen Umgebung um $z_{1/2} = \pm\mathrm{i}$ holomorph. Für $z_{1/2} = \pm 2\mathrm{i}$ gilt:

- $z_1 = -2\mathrm{i}$ ist sowohl einfach Nullstelle des Nenners als auch des Zählers von $\frac{z+2\mathrm{i}}{z^2+4}$. Daher existiert der Grenzwert
$$\lim_{z\to -2\mathrm{i}} f(z) = \frac{1}{-4\mathrm{i}} + \left(-2\mathrm{i} - \frac{1}{2}\right)\exp\left(\frac{1}{-2\mathrm{i} - \frac{1}{2}}\right) \in \mathbb{C},$$
weshalb f in $z_1 = -2\mathrm{i}$ stetig fortsetzbar ist und die isolierte Singularität hebbar. Das Residuum ist daher $\operatorname*{Res}_{z=-2\mathrm{i}}(f(z)) = 0$.

- $z_2 = 2\mathrm{i}$ ist einfach Nullstelle des Nenners von $\frac{z+2\mathrm{i}}{z^2+4}$. Es gilt einerseits
$$\lim_{z\to 2\mathrm{i}} |f(z)| = \infty$$
und andererseits
$$\lim_{z\to 2\mathrm{i}} (z-2\mathrm{i})\cdot f(z) = \lim_{z\to 2\mathrm{i}} \left(1 + (z-2\mathrm{i})\left(z-\frac{1}{2}\right)\exp\left(\frac{1}{z-\frac{1}{2}}\right)\right) = 1 + 0 = 1,$$
weshalb bei z_2 ein Pol erster Ordnung vorliegt. Gleichzeitig ist der zweite Grenzwert der Wert des Residuums von f dort, also $\operatorname*{Res}_{z=2\mathrm{i}}(f(z)) = 1$.

Die dritte isolierte Singularität von f liegt bei $z_3 = \frac{1}{2}$, da das Argument der Exponentialfunktion dort eine Polstelle hat. Gleichwohl hat f bei z_3 eine wesentliche Singularität. Um dies zu zeigen, betrachten wir

$$\begin{aligned}
\left(z-\frac{1}{2}\right)\cdot\exp\left(\frac{1}{z-\frac{1}{2}}\right) &= \left(z-\frac{1}{2}\right)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot\left(\frac{1}{z-\frac{1}{2}}\right)^k \\
&= \left(z-\frac{1}{2}\right)\cdot\left[1 + \frac{1}{z-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2!\cdot\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{3!\cdot\left(z-\frac{1}{2}\right)^3} + \dots\right] \\
&= \left(z-\frac{1}{2}\right) + 1 + \frac{1}{2!\left(z-\frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{3!\cdot\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} + \dots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot\left(\frac{1}{z-\frac{1}{2}}\right)^{k-1} = \sum_{m=-\infty}^{0}\frac{1}{(-m)!}\cdot\left(z-\frac{1}{2}\right)^{m+1}.
\end{aligned}$$

Da der erste Summand von f in einer offenen Umgebung um $z_3 = \frac{1}{2}$ holomorph ist, ist genau die obige Reihe die Laurent-Reihe von f um $z_3 = \frac{1}{2}$. Offensichtlich bricht ihr Hauptteil nicht ab, weshalb es sich um eine wesentliche Singularität handelt. Für das

Residuum gilt $\operatorname*{Res}_{z=\frac{1}{2}}(f(z)) = c_{-1} = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$.

Teilaufgabe (c): Der gegebene Weg γ ist geschlossen, denn $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$, allerdings ist auch jeder Teilweg von γ geschlossen, denn $\gamma(0) = \gamma(\pi) = \gamma(2\pi)$. Graphisch handelt es sich dabei um eine liegende 8, wobei diese sich aus zwei Kreisen mit Radius 1 zusammensetzt, deren Mittelpunkte bei ± 1 liegen. Von den isolierten Singularitäten von f wird nur diejenige bei $z_3 = \frac{1}{2}$ umrundet, und zwar im Uhrzeigersinn (also mathematisch negativ) und einmal. Die Windungszahl für z_3 ist also $\eta_\gamma(z_3) = -1$. Mit dem Residuensatz folgt dann

$$\oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \cdot \eta_\gamma(z_3) \cdot \operatorname*{Res}_{z=z_3}(f(z)) = 2\pi\mathrm{i} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{2} = -\pi\mathrm{i}.$$