Aufgabenstellung und Lösung

Es ist die folgende Aufgabe zu lösen:Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie jeweils ihre Antwort.

(a) Es gibt eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derart, dass $t \mapsto \sin(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung $x' = f(x)$ ist.

(b) Ist $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = 2t - t^2 + x, \quad x(0) = 1,$$

so gilt die Ungleichung $x(t) > t^2$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Es ist nicht nötig, die Lösung explizit anzugeben.

(c) Die Differentialgleichung $x''' - x'' + x' - x = 0$ besitzt eine nicht-konstante Lösung, die die Bedingungen $x(0) = x(\pi) = x'(\pi) = 0$ erfüllt.

Lösungsvorschlag: Teilaufgabe (a): Die Aussage ist falsch. Nehmen wir an, dass sie wahr ist, und es ein solches f gibt. Dann erhält man wegen $\sin'(t) = \cos(t)$ beim Einsetzen in die gegebenene Differentialgleichung, dass

$$f(\sin(t)) = \cos(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \text{ ist.}$$

Betrachten wir nun $t = 0$ und $t = \pi$. Es ist offenbar $\sin(0) = 0 = \sin(\pi)$. Damit folgt für f sofort

$$f(0) = \begin{cases} f((\sin(0)) = \cos(0) = 1 \\ f((\sin(\pi)) = \cos(\pi) = -1 \end{cases}.$$

So eine Funktion f ist also gar keine Funktion, da etwa dem Argument 0 zwei Funktionswerte zugeordnet sind. Insbesondere ist f also nicht wohldefiniert und offensichtlich auch nicht stetig. Das ist ein Widerspruch zur Annahme.

Teilaufgabe (b): Die rechte Seite der Differentialgleichung, $(t, x) \mapsto 2t - t^2 + x$, ist stetig partiell differenzierbar nach x mit $\partial_x(2t - t^2 + x) = 1$. Insbesondere ist die rechte Seite damit lokal Lipschitz-stetig bezüglich x. Damit hat jedes Anfangswertproblem nach dem Satz von Picard-Lindelöf eine eindeutige, maximale Lösung. Damit ist das gegebene Problem auch eindeutig lösbar. Wir betrachten nun die Funktion $\hat{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\hat{x}(t) = t^2$. Offenbar ist sie die eindeutige und maximale, sogar globale, Lösung der Differentialgleichung zu den Anfangswerten $\hat{x}(0) = 0$. Weiter gilt

$$\hat{x}(0) = 0 < 1 = x(0),$$

und mit dem Vergleichsprinzip folgt, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt: $x(t) > \hat{x}(t) = t^2$. Genau das ist die Behauptung. Also ist die Aussage wahr.

Teilaufgabe (c): Das charakteristische Polynom der zu untersuchenden linearen homogenen Differentialgleichung ist gegeben durch

$$p(z) = z^3 - z^2 + z - 1 \overset{\text{Polynomdivision}}{=} (z-1)(z^2+1),$$

wobei wir die Nullstellen leicht bestimmen können. Sie sind bei $z_1 = 1$ und $z_{2/3} = \pm\mathrm{i}$. Jede Lösung der Differentialgleichung ist also von der Form $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$x(t) = \alpha \mathrm{e}^t + \beta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} + \gamma \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}.$$

Für die Ableitung gilt $x'(t) = \alpha \mathrm{e}^t - \mathrm{i}\beta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} + \mathrm{i}\gamma \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ und mithilfe der angegebenen Bedingungen und $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}$ ergeben sich folgende drei Gleichungen:

$$x(0) = \alpha + \beta + \gamma \overset{!}{=} 0,$$
$$x(\pi) = \alpha \mathrm{e}^\pi - \beta - \gamma \overset{!}{=} 0,$$
$$x'(\pi) = \alpha \mathrm{e}^\pi + \mathrm{i}\beta - \mathrm{i}\gamma \overset{!}{=} 0.$$

Wir haben es also mit einem linearen Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei unbekannten Variablen, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, zu tun. Dieses lösen wir mühelos, beispielsweise mit dem Gauß-Algorithmus. Als eindeutige Lösung dieses linearen Gleichungssystems erhalten wir $\alpha = \beta = \gamma = 0$, also ist die Lösung für dieses Anfangswertproblem $x(t) = 0$ und damit konstant. Die Aussage ist also falsch.

J.S.