Frühjahr 24 Themennummer 2 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Sei $M \subset \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ eine nicht-leere Teilmenge der positiven reellen Zahlen. Zeigen Sie, dass die Menge
$$A := \left\{\frac{1}{x} \mid x \in M\right\}$$
genau dann nach oben beschränkt ist, wenn $\inf(M) > 0$ gilt.

b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Es gelte $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(i) Es gilt: $f'(0) = 1$.

(ii) Es existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zahlen $x_n > 0$ mit $f'(x_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

(iii) Es gilt: $f''(0) = 0$.

Lösungsvorschlag:

a) " $\implies$: " Sei A nach oben beschränkt durch $C > 0$. Für alle $x \in M$ gilt
$$x = \frac{1}{\frac{1}{x}} \geq \frac{1}{C},$$
weil $\frac{1}{x} \in A$ ist. Damit ist $\frac{1}{C} > 0$ eine untere Schranke von M. Das Infimum erfüllt nun $\inf(M) \geq \frac{1}{C} > 0$, ist also positiv.
" $\impliedby$: " Ist $\inf(M) > 0$, so ist $\frac{1}{\inf(M)}$ eine wohldefinierte, positive reelle Zahl und eine obere Schranke an A, weil $x \geq \inf(M)$ für alle $x \in M$ gilt, also $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{\inf(M)}$ für alle $\frac{1}{x} \in A$ folgt. Damit ist A nach oben (durch $\frac{1}{\inf(M)}$) beschränkt.

b) (i) Weil f differenzierbar ist, gilt für jede Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schon $f'(0) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n) - f(0)}{x_n}$. Weil f als differenzierbare Funktion auch stetig ist, folgt $f(0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ und für die Nullfolge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ folgt $f'(0) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$.

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, die Funktion f ist stetig auf $[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}]$ und differenzierbar auf $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1})$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $x_n \in (\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1})$ mit $f'(x_n) = \dfrac{f(\frac{1}{n-1}) - f(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}} = \dfrac{\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}} = 1$. Wegen $x_n > \frac{1}{n} > 0$ sind alle Folgeglieder positiv und wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n-1}$ konvergiert die Folge nach dem Sandwichlemma/Schachtelungssatz gegen 0.

(iii) Für die Folge aus (ii) gilt wegen $f'(0) = 1 = f'(x_n)$ analog zu (i)
$$f''(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(x_n) - f'(0)}{x_n} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

J.F.B.