Frühjahr 24 Themennummer 1 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Formulieren Sie den Satz von Rouché.

b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| > e$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $az^n = e^z$ genau n Lösungen (unter Berücksichtigung von Vielfachheiten) in der offenen komplexen Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ hat.

c) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| < \frac{1}{e}$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $az^n = e^z$ keine Lösungen in $\mathbb{D}$ hat.

Lösungsvorschlag:

a) Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und beschränkt und f, g meromorph auf einer Umgebung der kompakten Menge $\overline{D}$. Sei Γ in D zusammenziehbar und vermeide Pole und Nullstellen von f. Unter der Annahme

$$|g(z)| < |f(z)| \text{ für alle } z \in \operatorname{Spur}(\Gamma)$$

gilt:

$$\sum_{z \in D} \operatorname{Ind}_z(\Gamma) \operatorname{Ord}_{f+g}(z) = \sum_{z \in D} \operatorname{Ind}_z(\Gamma) \operatorname{Ord}_f(z).$$

b) Wir verwenden obigen Satz von Rouché mit $\Gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ \Gamma(t) = e^{it},\ f(z) = az^n$ und $g(z) = -e^z$. Wir überprüfen alle Voraussetzungen:
$D \coloneqq \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ ist offen und beschränkt durch 2, die Menge $\mathbb{C}$ ist eine offene Umgebung des Abschlusses und f und g sind darauf holomorph also auch meromorph. Wegen $|f(z)| = |a||z|^n = |a| > e$, hat f keine Nullstellen auf der Spur von Γ. Außerdem hat f keine Pole in $\mathbb{C}$, also auch nicht in $\operatorname{Spur}(\Gamma)$. Die Kurve Γ ist in D natürlich zusammenziehbar und geschlossen. Zuletzt gilt $|f(z)| = |a||z|^n = |a| > e = e^1 = e^{|z|} \geq e^{\operatorname{Re}(z)} = |e^z| = |g(z)|$ für alle $z \in \operatorname{Spur}(\Gamma)$. Weil $z = 0 \in \mathbb{D}$ eine n-fache Nullstelle (oder Nullstelle n-ter Ordnung) von f ist, folgt mit dem Satz von Rouché nun

$$\sum_{z \in D} \operatorname{Ind}_z(\Gamma) \operatorname{Ord}_{f+g}(z) = \sum_{z \in D} \operatorname{Ind}_z(\Gamma) \operatorname{Ord}_f(z) = n,$$

es gibt also mit Vielfachheit n Nullstellen von $f + g$ in $\mathbb{D}$, weil f und $f + g$ keine Pole besitzen und die Punkte die von Γ umschlossen werden, genau die Punkte in $\mathbb{D}$ sind von denen jeder genau einmal in positiver Richtung umrundet wird. Die Nullstellen von $f + g$ sind aber genau die Lösungen der Gleichung, wegen $(f + g)(z) = 0 \iff az^n - e^z = 0 \iff az^n = e^z$. Somit ist die Aussage gezeigt.

c) Wir verwenden wieder den Satz von Rouché mit den gleichen Funktionen, Mengen und der Kurve wie in b). Alle Voraussetzungen können genauso geprüft werden wie in b) mit der Ausnahme $|f| > |g|$. Stattdessen gilt jetzt $|f(z)| = |a||z|^n = |a| < \frac{1}{e} = e^{-1} = e^{-|z|} \leq e^{\operatorname{Re}(z)} = |e^z| = |g(z)|$ für alle $z \in \operatorname{Spur}(\Gamma)$. Der Satz von Rouché liefert wieder

$$\sum_{z \in D} \operatorname{Ind}_z(\Gamma) \operatorname{Ord}_{f+g}(z) = \sum_{z \in D} \operatorname{Ind}_z(\Gamma) \operatorname{Ord}_g(z) = 0,$$

weil e^z keine Nullstellen und Pole in $\mathbb{C}$ besitzt. Also besitzt auch $f+g$ keine Nullstellen, weil eine Summe nichtnegativer Zahlen genau dann verschwindet, wenn jeder Summand 0 ist und $f+g$ keine Pole besitzt. Wegen $(f+g)(z) = 0 \iff az^n = e^z$ (siehe b)) gibt es nun keine Lösung der Gleichung auf $\mathbb{D}$. Dies war zu zeigen.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$