Frühjahr 24 Themennummer 1 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Zeigen Sie, dass für jedes $\alpha \in (-1,1)$
$$\int_0^\pi \frac{1}{1-\alpha\cos(t)}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$
gilt.
Hinweis: Es kann hilfreich sein dieses Integral in ein Integral zu überführen, bei dem über das Intervall $[0,2\pi]$ integriert wird.

Lösungsvorschlag:
Wir geben zwei verschiedene Lösungen an.

Variante 1: Es gilt $\int_0^\pi \frac{1}{1-\alpha\cos(t)}\mathrm{d}t = \lim\limits_{b\to\pi-}\int_0^b \frac{1}{1-\alpha\cos(t)}\mathrm{d}t$, das zweite Integral können wir mittels der Standardsubstitution $x = \tan(\frac{t}{2}), \cos(t) = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \mathrm{d}t = \frac{2}{1+x^2}\mathrm{d}x$ berechnen. Wir verwenden die Abkürzung $c_\alpha := \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha} > 0$. Dieser Ausdruck ist wohldefiniert, weil für den Nenner $1+\alpha > 1-1 = 0$ gilt und positiv, weil Zähler und Nenner positiv sind $(1-\alpha > 1-1 = 0)$.

$$\begin{aligned}
\int_0^b \frac{1}{1-\alpha\cos(t)}\mathrm{d}t &= \int_0^{\tan(\frac{b}{2})} \frac{1}{1-\alpha\frac{1-x^2}{1+x^2}}\cdot\frac{2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\tan(\frac{b}{2})}\frac{2}{1+x^2-\alpha(1-x^2)}\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{\tan(\frac{b}{2})}\frac{2}{1-\alpha+(1+\alpha)x^2}\mathrm{d}x = \frac{2}{1+\alpha}\int_0^{\tan(\frac{b}{2})}\frac{1}{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}+x^2}\mathrm{d}x\\
&= \frac{2}{(1+\alpha)c_\alpha}\int_0^{\tan(\frac{b}{2})}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{c_\alpha}}\right)^2}\mathrm{d}x = \frac{2}{(1+\alpha)\sqrt{c_\alpha}}\int_0^{\tan(\frac{b}{2})}\frac{\frac{1}{\sqrt{c_\alpha}}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{c_\alpha}}\right)^2}\mathrm{d}x\\
&= \frac{2}{(1+\alpha)\sqrt{c_\alpha}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{c_\alpha}}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\tan(\frac{b}{2})} \xrightarrow{b\to\pi} \frac{2}{(1+\alpha)\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}},
\end{aligned}$$

wobei verwendet wurde, dass $\tan(\frac{b}{2}) \overset{b\to\pi}{\longrightarrow} \infty$ und $\arctan(y) \overset{y\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$ gilt.

Variante 2: Wir betrachten das Integral $\int_{-\pi}^\pi \frac{1}{1-\alpha\cos(t)}\mathrm{d}t$ und stellen fest, dass der Integrand achsensymmetrisch zur y-Achse ist, weil die Kosinusfunktion gerade ist. Dieses Integral hat also den doppelten Wert des Integrals, das wir berechnen wollen. Die Gültigkeit der zu beweisenden Aussage für $\alpha = 0$ ist leicht einzusehen, wir nehmen im Folgenden also $\alpha \neq 0$ an.
Wir betrachten den Einheitskreisweg $\gamma : [-\pi,\pi] \to \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \gamma(t) = e^{it}$ und die Funktion $f : \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \to \mathbb{C},\ f(z) = \dfrac{2}{(2-\alpha(z+\frac{1}{z}))iz}\mathrm{d}z$. Diese ist holomorph als Verknüpfung holomorpher Funktionen, weil der Nenner keine Nullstellen aufweist. Aus $|z| = 1$ folgt nämlich $z \neq 0$ und $|\alpha(z+\frac{1}{z})| < |z| + \frac{1}{|z|} = 2$, also $\alpha(z+\frac{1}{z}) \neq 2$. Wir können nun das Wegintegral $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$ betrachten, es gilt:

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{-\pi}^\pi \frac{2}{(2-\alpha(e^{it}+e^{-it}))ie^{it}}ie^{it}\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^\pi \frac{1}{1-\alpha\cos(t)}\mathrm{d}t,$$

wobei wir die Eulersche Identität benutzt haben und die Eigenschaft $\frac{1}{e^{it}} = e^{-it}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Wir formen die Funktion f für $|z| = 1$ noch um und erhalten durch Ausmultiplizieren des Nenners und Erweitern mit i : $f(z) = \dfrac{2i}{\alpha z^2 + \alpha - 2z} =: g(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$. Insbesondere folgt $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma g(z)\mathrm{d}z$, wir werden das zweite Integral mit dem Residuensatz ausrechnen.

Es gilt $\alpha z^2 + \alpha - 2z = 0 \iff z = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4\alpha^2}}{2\alpha} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha}$. Damit besitzt g zwei Singularitäten, nämlich $z_+ := \dfrac{1 + \sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha}$ und $z_- := \dfrac{1 - \sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha}$. Beides sind einfache Nullstellen des Nenners (der Wurzelausdruck ist echt positiv, die Singularitäten also verschieden) und der Zähler hat keine Nullstellen. Damit sind beides Pole erster Ordnung. Die Residuen erhalten wir also durch $\mathrm{Res}_g(z_\pm) = \dfrac{2i}{2\alpha z_\pm - 2}$.

Es gilt $|z_+| > \frac{1}{|\alpha|} > 1$, also wird nur z_- von γ umkreist und zwar genau einmal (würde auch z_- nicht umkreist werden, so wären alle Integrale 0, was aber nicht sein kann, weil der Integrand $\frac{1}{1-\alpha\cos(t)}$ strikt positiv und stetig ist). Weil g auf $\mathbb{C}\backslash\{z_-, z_+\}$ holomorph ist, die Singularitäten nicht auf der Spur von γ liegen und $\mathbb{C}$ offen und konvex ist, können wir den Residuensatz anwenden und erhalten

$$\int_\gamma g(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \;\mathrm{Res}_g(z_-) = 2\pi i \frac{2i}{2\alpha z_- - 2} = \frac{2\pi}{1 - (1 - \sqrt{1 - \alpha^2})} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \alpha^2}}.$$

Dieser Wert entspricht genau dem Doppelten unseres gesuchten Integrals, weshalb Division durch 2 das gesuchte Ergebnis liefert. Damit ist die Formel auch für $\alpha \neq 0$ bewiesen.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$