Frühjahr 24 Themennummer 1 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Gegeben Sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x' &= -x(e^x-1)^2 + y, \\ y' &= -2x - y^3. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass (0,0) die einzige Ruhelage des Systems ist.

b) Begründen Sie, dass ein Ansatz über Linearisierung nicht zielführend ist, wenn es darum geht, das Stabilitätsverhalten von (0,0) zu bestimmen.

c) Beweisen Sie, dass (0,0) asymptotisch stabil ist.
Hinweis: Eine Lyapunov-Funktion der Form $V(x,y) = \alpha x^2 + \beta y^2$ mit geeignetetn $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ kann hierbei hilfreich sein.

Lösungsvorschlag:

a) Wir bestimmen die Nullstellen der rechten Seite. Aus $-x(e^x-1)^2 + y = 0$ folgt $y = x(e^x-1)^2$, was eingesetzt in die untere Gleichung auf $-2x - (x(e^x-1)^2)^3 = 0$ führt, also $-x(2 + x^2(e^x-1)^6) = 0$. Damit diese Gleichung erfüllt ist, muss $x = 0$ sein, weil der zweite Faktor stets strikt positiv ist, also folgt auch $y = 0(e^0-1)^2 = 0$. Damit ist (0,0) die einzige Nullstelle der Strukturfunktion und die einzige Ruhelage des Systems.

b) Wir bestimmen die Jacobimatrix der Strukturfunktion. Es gilt $D(x,y) = \begin{pmatrix} -(e^x-1)^2 - 2xe^x(e^x-1) & 1 \\ -2 & -3y^2 \end{pmatrix}$, also $D(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Die Eigenwerte dieser Matrix sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\lambda^2 + 2$, also sind $\pm\sqrt{2}i$ die Eigenwerte. Alle Eigenwerte haben Realteil 0, weshalb keine Aussage über das Stabilitätsverhalten möglich ist.

c) Wir wählen die Funktion aus dem Hinweis mit $\alpha = 2$ und $\beta = 1$, dann ist $\nabla V(x,y) = (4\alpha x, 2\beta y)^{\mathrm{T}}$ und wir erhalten

$$\nabla V(x,y)^{\mathrm{T}}(-x(e^x-1)^2 + y, -2x - y^3)^{\mathrm{T}} = -4x^2(e^x-1)^2 - 4y^4 \leq 0$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, also haben wir eine Lyapunovfunktion gefunden. Weil V nichtnegativ ist und $V(x,y) = 0 \iff x = 0 = y$ gilt, ist (0,0) ein striktes isoliertes Minimum von V; für $(x,y) \neq 0$ gilt außerdem $-4x^2(e^x-1)^2 - 4y^4 < 0$. Nach der direkten Methode von Lyapunov ist (0,0) also asymptotisch stabil.

$\mathcal{J.F.B.}$