Frühjahr 24 Themennummer 1 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Zeigen Sie, dass jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{\|(x,y)\|_2 \to \infty} f(x,y) = \infty$$

ein globales Minimum besitzt. Hierbei bezeichnet $\|(x,y)\|_2 := \sqrt{x^2+y^2}$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^2$.

b) Begründen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \frac{1}{4}(x^2+y^2-2)^2 - \frac{1}{3}y^3$$

ein globales Minimum besitzt und bestimmen Sie dieses sowie alle globalen Minimalstellen von f.

Lösungsvorschlag:

a) Per Definitionem uneigentlicher Limiten, gibt es ein $R > 0$ mit $\|(x,y)\|_2 \geq R \implies f(x,y) > f(0,0)$. Die Menge $B_R(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\|_2 \leq R\}$ ist kompakt (abgeschlossene, beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^2$) und nicht leer ($(0,0) \in B_R(0)$). Weil f stetig auf $\mathbb{R}^2$ also auch auf $B_R(0)$ ist, besitzt f ein globales Minimum auf $B_R(0)$, d. h. es gibt ein $x_0 \in B_R(0)$ mit $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in B_R(0)$, insbesondere also $f(x_0) \leq f(0,0)$. Damit gilt dann aber für alle $x \in \mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)$ ebenfalls
$f(x_0) \leq f(0,0) \leq f(x)$ und es folgt $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$. Damit ist x_0 globales Minimum von f.

b) Wir verwenden das Kriterium aus a). Offensichtlich ist f als Polynom glatt, also auch stetig. Wegen $|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|_2$ folgt

$$f(x,y) \geq \frac{1}{4}(\|(x,y)\|_2^2 - 2)^2 - \frac{1}{3}|y|^3 \geq \frac{1}{4}\,\|(x,y)\|_2^4 - \|(x,y)\|_2^2 + 1 - \frac{1}{3}\,\|(x,y)\|_2^3 = g(\|(x,y)\|_2)$$

mit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 1$. Weil g ein Polynom vierten Grades mit positivem Leitkoeffizient ist, folgt $\lim_{t\to\infty} g(t) = \infty$, also auch $\lim_{\|(x,y)\|_2 \to \infty} f(x,y) \geq \lim_{\|(x,y)\|_2 \to \infty} g(\|(x,y)\|_2) = \infty$. Nach a) besitzt f ein globales Minimum. Wir berechnen den Gradienten.
Es ist $\nabla f(x,y) = (x(x^2+y^2-2), y(x^2+y^2-2) - y^2)^{\mathrm{T}}$. Wir bestimmen die Nullstellen. Damit die erste Komponente verschwindet, muss $x = 0$ oder $\|(x,y)\|_2^2 = 2$ gelten. Ist $x = 0$ so wird die zweite Komponente genau dann 0, wenn $y(y^2 - y - 2) = 0$ gilt, also wenn eine der Gleichungen $y = 0, y = -1, y = 2$ gilt. Ist dagegen $\|(x,y)\|_2^2 = 2$, so wird die zweite Komponente genau für $y = 0$ verschwinden. Aus $\|(x,y)\|_2^2 = 2$ und $y = 0$ folgt $x = \pm\sqrt{2}$. Wir erhalten also fünf stationäre Punkte:

$$(0,0), \quad (0,-1), \quad (0,2), \quad (\sqrt{2},0), \quad (-\sqrt{2},0)$$

mit Funktionswerten

$$1, \quad \frac{7}{12}, \quad -\frac{5}{3}, \quad 0, \quad 0.$$

Das globale Minimum muss ein stationärer Punkt sein, weil $\mathbb{R}^2$ offen und f differenzierbar ist. Daher ist der stationäre Punkt mit dem kleinsten Funktionswert eine globale Minimalstelle. Der minimale Funktionswert ist $-\frac{5}{3}$ und die einzige globale Minimalstelle ist (0,2).

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$