Frühjahr 23 Themennummer 3 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Auf der Menge
$$\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x^2 + 4y^2 \leq z\}$$
sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$f(x,y,z) = \frac{1 + 4x^2 + 3y^2}{1 + z^2}.$$

a) Für jedes $\zeta > 0$ bezeichnet $f|_{\Omega_\zeta}$ die Einschränkung von f auf die Menge $\Omega_\zeta := \{(x,y,z) \in \Omega \mid z = \zeta\}$. Zeigen Sie, dass $f|_{\Omega_\zeta}$ ein globales Maximum und ein globales Minimum besitzt und deren Werte gegeben sind durch
$$\frac{1 + \frac{4}{3}\zeta}{1 + \zeta^2} \quad \text{beziehungsweise} \quad \frac{1}{1 + \zeta^2}.$$

b) Entscheiden Sie jeweils mit Begründung, ob f ein globales Maximum beziehungsweise ein globales Minimum besitzt, und bestimmen Sie gegebenenfalls dessen Wert.

Lösungsvorschlag:

a) Die Funktion f ist als Verknüpfung stetiger Funktionen selbst eine stetige Funktion, weil der Nenner nirgends verschwindet. Für jedes $\zeta > 0$ ist Ω_ζ beschränkt, denn für alle $(x,y,z) \in \Omega_\zeta$ gilt $|(x,y,z)|^2 \leq (3x^2 + 4y^2 + z^2) \leq z + z^2 = \zeta + \zeta^2$, also $|(x,y,z)| \leq \sqrt{\zeta + \zeta^2}$. (Hier bezeichnet $|\cdot|$ die euklidische Norm auf dem $\mathbb{R}^3$.) Außerdem sind die Mengen abgeschlossen, ist nämlich $(x_n, y_n, z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega_\zeta$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, so folgt $z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} \zeta = \zeta$ und $3x^2 + 4y^2 = \lim\limits_{n\to\infty} 3x_n^2 + 4y_n^2 \leq \lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, also $(x,y,z) \in \Omega_\zeta$. Damit ist für jedes $\zeta > 0$ die Menge $\Omega_\zeta \subset \mathbb{R}^3$ abgeschlossen und beschränkt und daher kompakt nach dem mehrdimensionalen Satz von Bolzano-Weierstraß. Damit besitzt nach dem Satz von Minimum und Maximum die Funktion $f|_{\Omega_\zeta}$ ein globales Minimum und ein globales Maximum, weil diese Mengen niemals leer sind, denn für jedes $\zeta > 0$ ist $(0{,}0,\zeta) \in \Omega_\zeta$. Wegen
$$f(x,y,z) = \frac{1 + 4x^2 + 3y^2}{1 + z^2} = \frac{1 + 4x^2 + 3y^2}{1 + \zeta^2} \geq \frac{1}{1 + \zeta^2} = f(0{,}0,\zeta)$$
und $(0{,}0,\zeta) \in \Omega_\zeta$ ist das Minimum durch $\dfrac{1}{1 + \zeta^2}$ gegeben. Für das Maximum halten wir zunächst fest, dass für $(x,y,z) \in \Omega_\zeta$ die Ungleichung
$x^2 = \dfrac{1}{3}3x^2 \leq \dfrac{1}{3}(3x^2 + 4y^2) \leq \dfrac{1}{3}z = \dfrac{1}{3}\zeta$ gilt, also auch
$$f(x,y,z) = \frac{1 + 4x^2 + 3y^2}{1 + z^2} \leq \frac{1 + 3x^2 + 4y^2 + x^2}{1 + \zeta^2} \leq \frac{1 + \zeta + \frac{1}{3}\zeta}{\zeta^2} = \frac{1 + \frac{4}{3}\zeta}{1 + \zeta^2} = f\left(\frac{\sqrt{\zeta}}{\sqrt{3}}, 0, \zeta\right).$$

Wegen $3\left(\dfrac{\sqrt{\zeta}}{\sqrt{3}}\right)^2 + 4\cdot 0^2 = \zeta \leq \zeta$, ist $\left(\dfrac{\sqrt{\zeta}}{\sqrt{3}}, 0, \zeta\right) \in \Omega_\zeta$ und $\dfrac{1 + \dfrac{4}{3}\zeta}{1 + \zeta^2}$ ist das Maximum.

b) Wir bezeichnen die in a) bestimmten Extremalstellen mit $m_\zeta := (0{,}0,\zeta)$ und $M_\zeta := \left(\frac{\sqrt{\zeta}}{\sqrt{3}}, 0, \zeta\right)$, und die zugehörigen Werte mit $w_\zeta := \dfrac{1}{1+\zeta^2}$ und $W_\zeta := \dfrac{1+\frac{4}{3}\zeta}{1+\zeta^2}$.
Für $\zeta \to \infty$ konvergiert $f(m_\zeta) = w_\zeta$ gegen 0, also ist $\inf f(\Omega) \leq 0$. Weil $f(x,y,z)$ für alle $(x,y,z) \in \Omega$ strikt positiv ist, gilt $\inf f(\Omega) = 0$ und die Funktion besitzt kein globales Minimum.
Wir betrachten jetzt die Funktion $h : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $h(t) := W_t$ und untersuchen das Extremwertverhalten von h. Die Funktion ist stetig differenzierbar und erfüllt $\lim\limits_{t\to 0} h(t) = 1$ und $\lim\limits_{t\to\infty} = 0$. Außerdem ist $h'(t) = \dfrac{\frac{4}{3}(1+t^2) - 2t(1+\frac{4}{3}t)}{(1+t^2)^2}$, was genau dann verschwindet, wenn $2(1+t^2) = t(3+4t)$ gilt, also wenn $0 = 2t^2 + 3t - 2$ erfüllt ist. Die einzige positive Nullstelle diesen Polynoms ist $t_0 = \dfrac{1}{2}$ mit $h(\frac{1}{2}) = \dfrac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{4}} = \dfrac{4}{3}$. Dieser Wert ist höher als die Grenzwerte am Rand und die Ableitung hat nur eine einzige Nullstelle, daher muss dieser Wert ein globales Maximum sein (Kurvendiskussion: die Ableitung wechselt auf $(0,\frac{1}{2})$ und $(\frac{1}{2},\infty)$ ihr Vorzeichen nicht, auf dem ersten Intervall muss das Vorzeichen positiv sein, weil f dort wachsen muss ($\lim\limits_{t\to 0} h(t) = 1 > h(\frac{1}{2})$) und analog muss f auf dem zweiten Intervall fallen). Für alle $(x,y,z) \in \Omega\backslash\{(0{,}0{,}0)\}$ gilt nun $f(x,y,z) \leq W_z = h(z) \leq h(\frac{1}{2}) = f(M_{\frac{1}{2}})$ und $M_{\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, 0, \dfrac{1}{2}\right)$ ist die globale Maximalstelle von f mit globalem Maximalwert $f(M_{\frac{1}{2}}) = W_{\frac{1}{2}} = h(\frac{1}{2}) = \dfrac{4}{3} > 1 = f(0{,}0{,}0)$.

$\mathcal{J.F.B.}$