Frühjahr 23 Themennummer 3 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Es sei $b : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig mit

$$\int_0^\infty |b(t)| \mathrm{d}t < \infty,$$

und $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sei eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = (-1 + b(t)) \cdot y.$$

Zeigen Sie, dass $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$ gilt.

b) Es sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Zeigen Sie: Falls jede Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto x(t)$ der Differentialgleichung $x' = Ax$ auf $[0, \infty)$ beschränkt ist, so gilt $\mathrm{Re}(\lambda) \leq 0$ für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von A. Entscheiden Sie begründet, ob die Umkehrung dieser Aussage auch richtig ist.

Lösungsvorschlag:

a) Falls $y \equiv 0$ ist, ist nichts zu zeigen. Sei also y nicht die Nullfunktion, wir zeigen, dass y keine Nullstellen besitzt. Weil b stetig ist, ist das Wachstum linear beschränkt und die Strukturfunktion lokal lipschitzstetig. Für alle $x \in \mathbb{R}, t \in [0, \infty)$ gilt nämlich $|(-1+b(t))x-(-1+b(t))y| = |b(t)-1||x-y| \leq \max_{s\in[t-c,t+c]} |b(s)-1||x-y|$, wobei das Maximum der stetigen Funktion auf dem kompakten Intervall endlich ist und als Lipschitzkonstante gewählt werden kann. $c > 0$ ist dabei so zu wählen, dass $t-c \geq 0$ gilt, also z. B. $c = t$ und für $t = 0$ wählt man als Intervall [0,1]. Also existieren zu jeder Anfangsbedingung lokal eindeutige maximale Lösungen auf $[0, \infty)$. Weil sich verschiedene Lösungskurven nicht schneiden und die Nullfunktion eine Lösung ist, kann jede Lösung, die nicht die Nullfunktion ist, keine Nullstellen besitzen. Für $t \in [0, \infty)$ gilt daher $b(t) = \frac{y'(t)}{y(t)} + 1 = \ln(|y(t)|)' + 1.$ und es ist

$$\infty > \int_0^\infty |b(s)| \mathrm{d}s > \left| \int_0^\infty (\ln|y(s)|)' + 1 \ \mathrm{d}s \right|,$$

insbesondere existiert also das letzte Integral, das definiert ist, als

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b (\ln|y(s)|)' + 1 \ \mathrm{d}s = \lim_{b\to\infty} \ln|y(b)| - \ln|y(0)| + b.$$

Insbesondere muss $\lim_{b\to\infty} \ln|y(b)| + b$ existieren, was nur möglich ist, wenn $\ln|y(b)| \to -\infty$ und daher $y(b) \to 0$ gilt. Ist nämlich zu einem $\varepsilon > 0$ $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen ∞ divergente Folge gegeben, für die $|y(t_n)| \geq \varepsilon$ gilt, so bleibt $\ln|y(t_n)|$ beschränkt durch $\ln(\varepsilon)$ und $\lim_{n\to\infty} \ln|y(t_n)| + t_n = \infty$, ein Widerspruch. Das kann nicht sein und so eine Folge gibt es nicht, also ist die Aussage bewiesen.

b) Die Matrix A ist über $\mathbb{C}$ trigonalisierbar, d. h. ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix J mittels einer Transformationsmatrix T, es gilt also $J = T^{-1}AT$. Jede Lösung von $x' = Ax$ ist von der Form Tv, wobei v eine Lösung von $y' = Jv$ ist. Beweis: Sei x eine Lösung von $x' = Ax$, dann ist $y(t) := T^{-1}x(t)$ stetig differenzierbar mit $y'(t) = T^{-1}x'(t) = T^{-1}Ax(t) = T^{-1}ATT^{-1}x(t) = JT^{-1}x(t) = Jy(t)$, also ist y eine Lösung von $y' = Jy$ und x von der Form Ty. Falls y für $t \to \infty$ unbeschränkt ist, so ist auch Ty unbeschränkt, denn die Abbildung $\mathbb{K}^2 \ni v \mapsto Tv \in \mathbb{K}^2$ ist stetig und, weil T trivialen Kern hat, gilt für alle $v \in \mathbb{K}^2$ mit $\|v\| = 1$ auch $\|Tv\| > 0$. Das Minimum $c := \min_{v \in \mathbb{K}^2 : \|v\|=1} \|Tv\|$ existiert nach dem Satz von Minimum und Maximum und ist positiv. Es gilt nun $\lim_{t\to\infty} \|Ty(t)\| \geq c \lim_{t\to\infty} \|y(t)\| = \infty$. Hierbei ist $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Wir können uns also darauf beschränken, obere Dreiecksmatrizen, beziehungsweise Jordannormalformen zu betrachten. Nun zur Aufgabe.

Um die Aussage zu zeigen, zeigen wir, dass immer eine unbeschränkte existiert, falls ein Eigenwert mit positivem Realteil existiert. Wir unterscheiden wieder ein paar Fälle:
Die Matrix ist diagonalisierbar mit zwei reellen Eigenwerten λ, μ, wobei $\lambda > 0$ ist, dann können wir $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ wählen. (Die Eigenwerte können gleich oder verschieden sein.) Eine Lösung ist die Abbildung $t \mapsto (\exp(\lambda t), 0)^{\mathrm{T}}$. Diese ist unbeschränkt.
Die Matrix hat einen einzelnen positiven reellen Eigenwert λ mit geometrischer Vielfachheit 1 und algebraischer Vielfachheit 2, dann ist $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ und wieder ist $t \mapsto (\exp(\lambda t), 0)^{\mathrm{T}}$ eine unbeschränkte Lösung.
Die Matrix hat keine reelllen Eigenwerte, sondern ein komplex konjugiertes Eigenwertpaar, d. h. Eigenwerte $\lambda \pm i\mu$ mit $\lambda > 0$, dann betrachten wir $J = \begin{pmatrix} \lambda + i\mu & 0 \\ 0 & \lambda - i\mu \end{pmatrix}$.
Eine komplexe Lösung ist $t \mapsto (\exp((\lambda + i\mu)t, 0)^{\mathrm{T}}$, die ebenso wieder unbeschränkt ist. Wir können aber auch J in die reelle Matrix $e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \cos(\mu t) & \sin(\mu t) \\ -\sin(\mu t) & \cos(\mu t) \end{pmatrix}$ transformieren und die Lösung $t \mapsto \exp(\lambda t)(\cos(\mu t), -\sin(\mu t))^{\mathrm{T}}$ betrachten, die für $t \to \infty$ wieder unbeschränkt ist.
Die Umkehrung ist falsch, dafür betrachten wir als Gegenbeispiel den Jordanblock $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit einzigem Eigenwert 0, der nichtpositiven Realteil hat. Die Abbildung $t \mapsto (t, 1)^{\mathrm{T}}$ ist eine unbeschränkte Lösung von $x' = Jx$ und die Umkehrung der Aussage somit falsch.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$