Frühjahr 23 Themennummer 3 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Formulieren Sie den Satz von Liouville und geben Sie einen Beweis an, der auf der Cauchyschen Integralformel für holomorphe Funktionen und deren Ableitungen oder auf dem Residuensatz basiert.

b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit

$$\operatorname{Re} f(z) \leq \operatorname{Re} z^n \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Zeigen Sie, dass dann f die Gestalt $f(z) = z^n + c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{C}$ besitzt.

Lösungsvorschlag:

a) Sei f eine ganze, beschränkte Funktion, d. h. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $|f(z)| \leq K$ für eine Konstante $K \in \mathbb{R}_+$ und alle $z \in \mathbb{C}$, dann ist f konstant.
Beweis: Weil f holomorph auf $\mathbb{C}$ ist, gibt es eine komplexe Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sodass $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ für alle $z, z_0 \in \mathbb{C}$ gilt. Wir betrachten die Kurven $\Gamma_R : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \Gamma_R(t) = z_0 + Re^{it}$ mit $\operatorname{Spur}(\Gamma_R) = \partial B_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$. Nach der Cauchyschen Integralformel gilt für alle $R > 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$ die Gleichung

$$a_n = \int_{\Gamma_R} \frac{f(\zeta)}{2\pi i(\zeta - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta,$$

mit welcher wir nun abschätzen können. Sei K die Beschränktheitskonstante von f, dann gilt nach der Standardabschätzung für Wegintegrale

$$|a_n| \leq |\Gamma_R| \max_{z\in\Gamma_R} \frac{|f(z)|}{|2\pi i||(z - z_0)^{n+1}|} \leq 2\pi R \frac{K}{2\pi R^{n+1}} = \frac{K}{R^n}.$$

Wir lassen nun R gegen ∞ streben und erhalten für alle $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq |a_n| = \lim_{R\to\infty} |a_n| \leq \lim_{R\to\infty} \frac{K}{R^n} = 0,$$

also $|a_n| = 0$ und folglich $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das eingesetzt in die Potenzreihendarstellung wiederum liefert $f(z) = a_0(z - z_0)^0 = a_0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, also $f \equiv a_0$. Daher ist f konstant.

b) Wir betrachten die ganze Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ g(z) = \exp(f(z) - z^n)$ und berechnen $|g(z)| = \exp(\operatorname{Re}(f(z) - z^n)) = \exp(\operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} z^n) \leq e^0 = 1$. Damit ist g beschränkt und nach dem Satz von Liouville konstant, für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt also $0 = g'(z) = g(z)(f'(z) - nz^{n-1})$, woraus wegen $g(z) \neq 0$ also $f'(z) = nz^{n-1}$ folgt. Aus dem Identitätssatz (oder der Eindeutigkeit von Stammfunktion bis auf additive Konstanten) folgt nun die Existenz von $c \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^n + c$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$