Frühjahr 23 Themennummer 3 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen mit $\pi \in U$.

a) Die Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ sei holomorph mit $f(\pi) = 0 = f'(\pi)$ und $f''(\pi) = 1$. Bestimmen Sie für

$$g : U \to \mathbb{C}, \; z \mapsto \sin(z) \cdot f(z)$$

die Nullstellenordnung in π.

b) Geben Sie an für welche natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ eine holomorphe Funktion $h : U \backslash \{\pi\} \to \mathbb{C}$ mit $(h(z))^n = (z-\pi)^6$ für alle $z \in U\backslash\{\pi\}$ existiert. Begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis: Wenn es ein derartiges h gibt, welchen Typ hat dann die isolierte Singularität von h bei π?

Lösungsvorschlag:

a) Nach den Voraussetzungen ist g holomorph und hat bei π eine Nullstelle, deren Ordnung durch Ableiten bestimmt werden kann. Aus der Potenzreihendarstellung folgt nämlich, dass die Ordnung der Nullstelle die kleinste natürliche Zahl mit $f^{(n)}(\pi) \neq 0$ ist. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
g'(z) &= \cos(z) \cdot f(z) + \sin(z) \cdot f'(z), \quad g'(\pi) = 0 \\
g''(z) &= -\sin(z) \cdot f(z) + 2\cos(z) \cdot f'(z) + \sin(z) \cdot f''(z), \quad g''(\pi) = 0 \\
g'''(z) &= -\cos(z) \cdot f(z) - 3\sin(z) \cdot f'(z) + 3\cos(z) \cdot f''(z) + \sin(z) \cdot f'''(z), \quad f'''(\pi) = 3
\end{aligned}$$

woraus folgt, dass die Nullstelle von dritter Ordnung ist.

b) Dies ist genau für $n \in \{1{,}2{,}3{,}6\}$ der Fall. Für diese $n \in \mathbb{N}$ ist auch $\dfrac{6}{n} \in \mathbb{N}$ und $h(z) := (z-\pi)^{\frac{6}{n}}$ holomorph mit der gewünschten Eigenschaft. Nun zur Umkehrung. Sei $n \in \mathbb{N}$ und h eine holomorphe Funktion und sie erfülle obige Gleichung, dann ist h nahe π beschränkt, denn es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(\pi) \subset U$ und für alle $z \in B_\varepsilon(\pi)\backslash\{\pi\}$ ist $|h(z)|^n = |z-\pi|^6 \leq \varepsilon^6$, also $|h(z)| \leq \varepsilon^{\frac{6}{n}}$. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz ist die Singularität hebbar und die stetige Fortsetzung von h in π ist holomorph auf U. Wegen $(\lim_{z\to\pi} h(z))^n = \lim_{z\to\pi}(h(z))^n = \lim_{z\to\pi}(z-\pi)^6 = 0$ erfüllt die stetige Fortsetzung $\hat{h}$ also $\hat{h}(\pi) = 0$. Für die Nullstellenordnung gilt nun analog

$$\mathrm{Ord}_{\hat{h}}(\pi) \cdot n = \mathrm{Ord}_{(z-\pi)^6}(\pi) = 6,$$

also ist n ein Teiler von 6 und damit $n \in \{1{,}2{,}3{,}6\}$ wie behauptet.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$