Frühjahr 23 Themennummer 3 Aufgabe 1 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$x' = 2tx^3, \quad x(2) = -\frac{1}{3}$$

eine eindeutige maximale Lösung $\lambda : I \to \mathbb{R}$ besitzt, und bestimmen Sie diese. Geben Sie insbesondere auch ihr Definitionsintervall I an

b) Wir betrachten auf dem $\mathbb{R}^2$ das System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} x' &= -4y^3 + 4y, \\ y' &= 4x^3 - 4x. \end{aligned}$$

(1) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad H(x,y) = x^4 - 2x^2 + y^4 - 2y^2$$

eine Erhaltungsgröße des gegebenen Systems ist, d. h. dass sie entlang jeder Lösungskurve konstant ist.

(2) Bestimmen Sie alle im abgeschlossenen ersten Quadranten liegenden stationären Punkte des Systems und untersuchen Sie diese auf Stabilität.

Lösungsvorschlag:

a) Die Strukturfunktion ist als Polynom auf dem $\mathbb{R}^2$ glatt und daher insbesondere auch lokal Lipschitzstetig, nach dem Satz von Picard-Lindelöf besitzt das Anfangswertproblem also eine eindeutige maximale Lösung. Man kann diese mittels Trennung der Variablen bestimmen (oder Erraten) und erhält die Funktion $\lambda : \left(-\sqrt{\frac{17}{2}}, +\sqrt{\frac{17}{2}}\right) \to \mathbb{R},\ \lambda(t) := -\dfrac{1}{\sqrt{17-2t^2}}$ als Lösung mit maximalem Existenzintervall $I = \left(-\sqrt{\frac{17}{2}}, +\sqrt{\frac{17}{2}}\right)$.

b) (1) Sei $u(t) = (x(t), y(t))$ eine Lösung der Differentialgleichung, dann folgt $H(u(t))' = \nabla H(u(t)) \cdot \nabla u(t) =$

$$(4x(t)^3 - 4x(t))(-4y(t)^3 + 4y(t)) + (4y(t)^3 - 4y(t))(4x(t)^3 - 4x(t)) = 0$$

also ist $H(u(t))' \equiv 0$ und $H(u(t))$ folglich konstant. Dies war zu zeigen.

(2) Die stationären Lösungen sind genau die Nullstellen der Strukturfunktion. Es gilt $0 = -4y^3 + 4y = 4y(1-y^2) \iff y \in \{-1{,}0{,}1\}$ und völlig analog $4x^3 - 4x = 0 \iff x \in \{-1{,}0{,}1\}$. Diejenigen Lösungen im abgeschlossenen erstem Quadranten sind genau die mit nichtnegativen Komponenten, also die Punkte $(0{,}0), (1{,}0), (0{,}1), (1{,}1)$.
Für die Stabilität nutzen wir die direkte Methode von Lyapunov; die Erhaltungsgröße E aus (1) und ihr additives Inverses $-E$ sind Lyapunovfunktionen.

Wir bestimmen die Extrema von E und erhalten wegen
x_0 Maximum von $E \iff x_0$ Minimum von $-E$ auch diejenigen von $-E$. Die Nullstellen des Gradienten von $\pm E$ sind genau die Ruhelagen, wir bestimmen die Hessematrix. Es gilt $H_E(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2-4 & 0 \\ 0 & 12y^2-4 \end{pmatrix}$, diese Matrix ist diagonal, die Eigenwerte liegen also auf der Diagonalen. Für (0,0) ist die Matrix negativ definit, der Punkt also ein lokales striktes Maximum von E und folglich ein lokales striktes Minimum von $-E$, also ist (0,0) stabil. Für (1,1) ist die Hessematrix positiv definit, also (1,1) lokales striktes Minimum von E und auch (1,1) ist stabil.
Die anderen beiden Ruhelagen untersuchen wir mit dem Linearisierungssatz, die Jacobimatrix der Strukturfunktion ist gegeben durch $J(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 4-12y^2 \\ 12x^2-4 & 0 \end{pmatrix}$.
Also ist $J(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$ und $J(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$. Beide Matrizen haben das gleiche charakteristische Polynom $\lambda^2 - 32 = 0$ mit den beiden Nullstellen $\pm 4\sqrt{2}$, also haben beide Matrizen einen Eigenwert mit positivem Realteil und die Ruhelagen sind instabil.
Wir zeigen abschließend noch, dass keine der Ruhelagen asymptotisch stabil ist. Die Ruhelagen (1,0) und (0,1) sind instabil, also auch nicht asymptotisch stabil. Für die anderen beiden Ruhelagen müssen wir Attraktivität widerlegen. Wäre (0,0) bzw. (1,1) attraktiv, so gäbe es $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, dass für alle $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $\|(x_0,y_0)\|_2 < \delta$ die Lösung der Differentialgleichung mit Anfangsbedingung $(x(0),y(0)) = (x_0,y_0)$ auf $[0,\infty)$ existiert und $\lim\limits_{t\to\infty}(x(t),y(t)) = (0,0)$ bzw. (1,1) erfüllt. Weil E eine Erhaltungsgröße ist, folgt dann aber $E(x_0,y_0) = E(x(0),y(0)) = E(x(t),y(t)) \to E(0,0) = 0$ bzw. $E(1,1) = -2$. Insbesondere muss also für alle (x_0,y_0) mit $\|(x_0,y_0)\|_2 < \delta$ auch $E(x_0,y_0) = 0$ bzw. -2 gelten. Das ist aber nicht erfüllt, weil z. B. $E(0,\delta) = \delta^4 - 2\delta^2 = \delta^2(\delta^2-2) \neq 0$ für $\delta \in (0,1)$ gilt und analog $E(1,1+\delta) \neq -2$ für geeignete δ gilt. Also sind beide Punkte asymptotisch instabil, weil sie nicht attraktiv sind.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$