Frühjahr 23 Themennummer 2 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Zeigen Sie, dass alle maximalen Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$x' = t + \frac{\sin(t)}{1+x^2+y^2} \cdot y \qquad y' = 3 + \frac{\cos(t)}{1+x^2+y^2} \cdot x$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert sind.

b) Es sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lokal lipschitzstetig mit

$$|g(x)| \leq \frac{|x|}{2}$$

für jedes $x \in \mathbb{R}^n$, wobei $|\cdot|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ bezeichne. Weiter sei $x : I \to \mathbb{R}^n$ mit $0 \in I$ eine maximale Lösung des autonomen Systems $x' = -x + g(x)$.

(1) Es sei $\varphi : I \to \mathbb{R}$ definiert durch $\varphi(t) := |x(t)|^2$. Zeigen Sie: $\varphi'(t) \leq -\varphi(t)$ für jedes $t \in I$.

(2) Zeigen Sie: $I \supseteq [0, \infty)$ und $x(t) \to 0$ für $t \to \infty$.

Lösungsvorschlag:

a) Wir schätzen die Strukturfunktion ab und erhalten mit der Beschränktheit der trigonometrischen Funktionen gegen 1 für alle $(t, x, y) \in \mathbb{R}^3$:

$$|f(t,x,y)| \leq |t| + 3 + \frac{|x| + |y|}{1+x^2+y^2}.$$

Der letztes Summand definiert eine stetige Funktion auf dem $\mathbb{R}^2$ der für $|(x, y)| \to \infty$ gegen 0 konvergiert, also beschränkt ist. Wir finden also ein $C > 0$ mit $|f(t, x, y)| \leq |t| + C$ weswegen das Wachstum linear abgechätzt werden kann und jede maximale Lösung global existiert. Man beachte zusätzlich, dass die Strukturfunktion stetig differenzierbar ist, also auch lokal lipschitzstetig ist.

b) (1) Mit der Kettenregel und dem Gradienten der Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, h(x) = |x|^2$, der durch $\nabla h(x) = 2x$ gegeben ist, erhalten wir mit der Cauchy-Schwartzschen Ungleichung $\varphi'(t) =$

$$2x'(t) \cdot x(t) = 2(-x(t) + g(x(t)))x(t) = 2g(x(t)) \cdot x(t) - 2|x(t)|^2 \leq$$
$$2|g(x(t))||x(t)| - 2|x(t)|^2 \leq |x(t)|^2 - 2|x(t)|^2 = -|x(t)|^2 = -\varphi(t).$$

(2) Offensichtlich ist φ stets nichtnegativ, also ist φ' stets nichtpositiv und daher φ monoton fallend. Damit bleibt für $t \to \infty$ die Lösung $x(t)$ aber beschränkt, kann also keine endliche Entweichzeit haben und muss daher für alle $t \geq 0$ existieren, weil $0 \in I$ vorausgesetzt ist und da $-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ und g global definiert sind, die Lösung also auch nicht den Definitionsbereich der Strukturfunktion verlassen kann.

Wir wissen schon, dass φ monoton fällt und nach unten durch 0 beschränkt ist, der Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t)$ muss also existieren und nichtnegativ sein. Wäre er strikt positiv, so würde aber die Ableitung eine strikt negative obere Schranke besitzen und damit müsste $\varphi(t)$ gegen $-\infty$ divergieren, ein Widerspruch. (Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(t) \leq c$ für ein $c < 0$ so folgt $f(t) = f(0)+f(t)-f(0) = f(0) + \int_0^t f'(s)\mathrm{d}s \leq f(0) + ct$, was für $t \to \infty$ gegen $-\infty$ divergiert.) Also ist $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$ und wegen der Normeigenschaften (Definitheit) folgt auch $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$