Frühjahr 23 Themennummer 2 Aufgabe 4 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Auf

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y \leq 0\} \cup \{(0,0)\}$$

betrachten wir die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R},\ f(x,y) = (1+x)(1+y) - e^x.$$

a) Geben Sie an, welche Punkte in $\mathbb{R}^2$ innere Punkte beziehungsweise Randpunkte von D sind. Entscheiden Sie begründet, ob D offen beziehungsweise abgeschlossen ist.

b) Entscheiden Sie mit Begründung, ob f im Innern von D lokale Extremalstellen besitzt.

c) Geben Sie mit Nachweis alle lokalen Extremalstellen von f an, die auf dem Rand von D liegen. Bedenken Sie, dass diese Stellen gemäß Definition von f in D liegen müssen.

Lösungsvorschlag:

a) Die inneren Punkte von D sind die Punkte in $(-\infty,0)^2$. Diese Menge ist offensichtlich eine offene Teilmenge von D, besteht also nur aus inneren Punkten von D. Wir zeigen, dass alle anderen Elemente von D keine inneren Punkte sind. Alle Punkte in $D\backslash(-\infty,0)^2$ sind von der Form $(x,0)$ für ein $x \leq 0$, für $\varepsilon > 0$ liegt $(x, \frac{\varepsilon}{2})$ zwar in einer ε-Kugel um $(x,0)$ aber nicht in D, weil der zweite Eintrag strikt positiv ist, damit sind das keine inneren Punkte. Wir bestimmen als nächstes den Abschluss von D und behaupten, dass dieser durch $(-\infty,0]^2$ gegeben ist. Diese Menge ist offensichtlich eine abgeschlossene Obermenge von D also Obermenge des Abschlusses. Jeder Punkt in D liegt natürlich auch im Abschluss, weshalb wir nur noch zeigen müssen, dass die Punkte $(0,y)$ für $y < 0$ im Abschluss liegen. Wegen $(-\frac{1}{n}, y) \in D$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(-\frac{1}{n}, y) = (0,y)$ ist dies aber der Fall und die Behauptung ist bewiesen. Der Rand ist nun das Komplement von Abschluss und Innerem, also die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \leq 0, x = 0 \text{ oder } y = 0\}$. Weil weder das Innere noch der Abschluss von D mit D übereinstimmen (betrachte $(-1,0)$ und $(0,-1)$) ist D weder offen noch abgeschlossen.

b) Die Funktion ist differenzierbar, jede lokale Extremalstelle im Inneren muss also ein stationärer Punkt sein. Der Gradient von f ist durch $\nabla f(x,y) = (1+y) - e^x, (1+x))^{\mathrm{T}}$ gegeben, damit der Gradient verschwindet, muss also $x+1 = 0 \iff x = -1$ gelten und eingesetzt in die zweite Gleichung muss $(1+y) - e^{-1} = 0 \iff y = e^{-1} - 1$ gelten. Der einzige stationäre Punkt von f ist also $(-1, \frac{1}{e} - 1) \in D$. Wir bestimmen die Hessematrix von f : $H_F(x,y) = \begin{pmatrix} -e^x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Für unseren stationären Punkt ist die Determinante der Hessematrix durch -1 gegeben, also negativ. Daher muss die Matrix je einen positiven und einen negativen Eigenwert haben, ist also indefinit. Daher kann der stationäre Punkt kein lokales Extremum sein, sondern muss ein Sattelpunkt sein und es gibt keine lokalen Extremalstellen im Inneren von D.

c) Die in D enthaltenen Randpunkte sind die Punkte $(x,0)$ mit $x \leq 0$. Für jeden dieser Punkte gilt $f(x,0) = 1 + x - e^x$, deshalb betrachten wir zunächst die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 1 + x - e^x$ und bestimmen die Ableitung $g'(x) = 1 - e^x$. Für $x \leq 0$ gilt $g'(x) \geq 0$ mit Gleichheit genau für $x = 0$. Außerdem ist $g'(x) \leq 0$ für $x \geq 0$ wieder mit Gleichheit genau für $x = 0$. Also wächst g streng monoton auf $(-\infty, 0]$ und fällt streng monoton auf $[0, \infty)$, weshalb bei $x = 0$ ein globales Maximum vorliegt. Es kann keine lokale Extremalstelle von f von der Form $(x,0)$ mit $x < 0$ geben, weil für jeden dieser Punkte und alle $0 < \varepsilon < |x|$ die Ungleichungen $f(x - \varepsilon, 0) < f(x, 0) < f(x + \varepsilon, 0)$ gelten. Wir betrachten abschließend den Punkt $(0,0)$ mit $f(0,0) = 0$, der kein lokales Minimum sein kann, weil für alle $\varepsilon > 0$ die Ungleichung $f(-\varepsilon, 0) < f(0,0) = 0$ gilt. Er ist aber ein lokales Maximum. Um das zu zeigen, formen wir die Funktion f um und erhalten $f(x, y) = (1+x)y+1+x-e^x = (1 + x)y + g(x) \leq (1 + x)y$, da $g(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Für alle $(x, y) \in D$ mit $\|(x, y)\|_2 < \frac{1}{2}$ folgt nun $-\frac{1}{2} < x, y \leq 0$ also $(1 + x) > 0$ und $y \leq 0$ und daher $(1+x)y \leq 0$. Das wiederum liefert $f(x, y) \leq (1+x)y \leq 0 = f(0,0)$ für alle $(x, y) \in D$ mit $\|(x, y)\|_2 < \frac{1}{2}$ und $(0,0)$ ist ein lokales Maximum von f.
Es war zwar nicht gefordert, wir beweisen aber noch, dass das lokale Maximum kein globales Maximum ist. Es gilt nämlich $f(-10, -10) = 81 - e^{-10} > 80 > 0 = f(0,0)$.

$\mathcal{J.F.B.}$