Frühjahr 23 Themennummer 2 Aufgabe 3 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ 2z^2 + 2 + e^{iz}$$

genau eine Nullstelle ξ in $U := \{z \in \mathbb{C} : |z - i| < 1\}$ besitzt und diese einfach ist. Folgern Sie hieraus, dass

$$g : U \backslash \{\xi\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{e^z}{f(z)}$$

keine Stammfunktion besitzt.

b) Es sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}, f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $u := \mathrm{Re}(f), v := \mathrm{Im}(f)$. Skizzieren Sie die Menge

$$Q := \{w \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(w)| + |\mathrm{Im}(w)| = 1\}$$

und zeigen Sie: Falls $|u(z)| + |v(z)| = 1$ für jedes $z \in G$, so ist f konstant.

Lösungsvorschlag:

a) Wir benutzen den Satz von Rouché und prüfen alle Voraussetzungen. Wir wollen den Satz auf die Funktionen $h_1 : B_2(i) \to \mathbb{C}, h_1(z) = 2z^2 + 2$ und $h_2 : B_2(i) \to \mathbb{C}, h_2(z) = e^{iz}$ und die Kurve $\Gamma : [0{,}2\pi] \to \mathbb{C}, \Gamma(t) = i + e^{it}$ anwenden. Natürlich sind die Funktionen holomorph auf $\mathbb{C}$, die Kurve zusammenziehbar und $B_2(i)$ ist offen und beschränkt. Auf der Spur von Γ liegen keine Nullstellen oder Pole von h_1, denn es gibt keine Pole und die Nullstellen von f in $\mathbb{C}$ sind i und $-i$, die beide nicht auf der Spur liegen. Für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\mathrm{Spur}(\Gamma)$ gilt $\mathrm{Ind}_z(\Gamma) \neq 0 \iff z \in U \iff \mathrm{Ind}_z(\Gamma) = 1$ und für alle $z \in \mathrm{Spur}(\Gamma)$ gilt

$$|h_1(z)| = |2(i + e^{it})^2 + 2| = |4ie^{it} + 2e^{2it}| \geq ||4ie^{it}| - |2e^{2it}|| = 2$$

sowie

$$|h_2(z)| = |e^{ie^{it}-1}| = e^{\mathrm{Re}(i\cos(t) - \sin(t) - 1)} = e^{-\sin(t)-1} \leq e^0 = 1,$$

also $|h_2(z)| \leq 1 < 2 \leq |h_1(z)|$. Damit sind alle Voraussetzungen erfüllt und es folgt

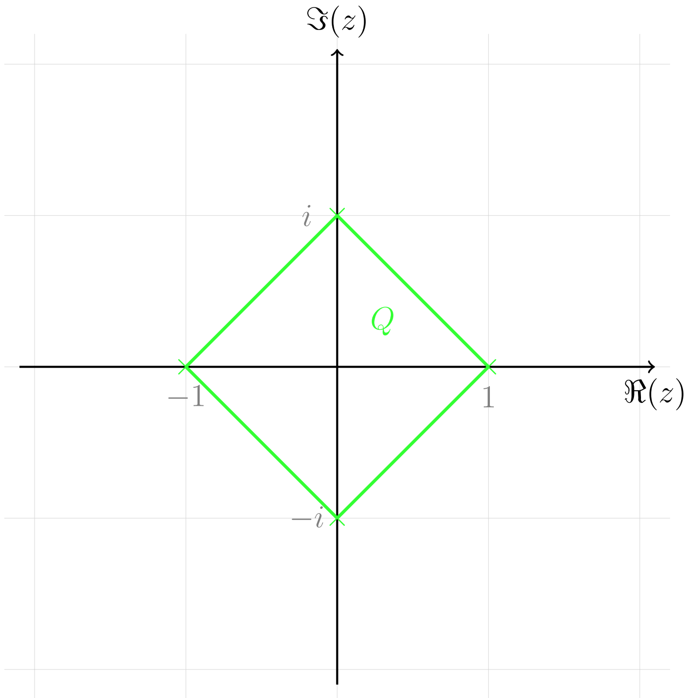
$$\sum_{z\in U} \mathrm{Ord}_f(z) = \sum_{z\in U} \mathrm{Ord}_{h_1+h_2}(z) = \sum_{z\in U} \mathrm{Ord}_{h_1}(z) = 1,$$

da h_1 genau die Nullstellen i und $-i$ besitzt von denen nur i in U liegt. Also gibt es genau eine Nullstelle ξ von f in U und diese ist von erster Ordnung, d. h. einfach. Demnach hat g bei ξ einen Pol erster Ordnung und das Residuum ist durch $\mathrm{Res}_g(\xi) = \dfrac{e^\xi}{f'(\xi)} = \dfrac{e^\xi}{4\xi + ie^{i\xi}} \neq 0$ gegeben (nicht 0, da der Zähler nie 0 werden kann). Das Integral von g über den geschlossenen Weg $\gamma : [0{,}2\pi] \to \mathbb{C},\ \gamma(t) = i + \frac{1}{2}e^{it}$ ist nach dem Residuensatz also ebenfalls nicht 0 und damit besitzt g keine Stammfunktion.

b) Wir zeigen zuerst, dass das Innere von Q die leere Menge ist. Ist $z \in Q$ irgendein Punkt, so ist entweder der Realteil oder der Imaginärteil von 0 verschieden, wir nehmen jetzt an, dass es der Realteil ist, denn für den Imaginärteil kann man analog argumentieren. Ist also $\mathrm{Re}(z) \neq 0$, so verschwindet auch der Betrag nicht. Wir betrachten jetzt für $0 < \varepsilon < \frac{\mathrm{Re}(z)}{2}$ die Zahl $z + \varepsilon$, dann ist $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z + \varepsilon)$, also sind auch die Beträge gleich, es gilt aber $|\mathrm{Re}(z+\varepsilon)| = |\mathrm{Re}(z) + \varepsilon| \neq |\mathrm{Re}(z)|$, da wir keine Vorzeichenwechsel im Argument haben und die Argumente verschieden sind (auf $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$ ist die Betragsfunktion injektiv). Also ist

$$|\mathrm{Re}(z+\varepsilon)| + |\mathrm{Im}(z+\varepsilon)| = |\mathrm{Re}(z+\varepsilon)| + |\mathrm{Im}(z)| \neq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| = 1$$

und $z + \varepsilon \notin Q$. D. h. aber, dass z kein innerer Punkt ist und weil z beliebig in Q gewählt war, dass es gar keinen inneren Punkt von Q gibt. Nun zur Aufgabe:
Wäre f nicht konstant, so müsste nach dem Satz von der Gebietstreue auch das Bild von f ein Gebiet sein, insbesondere also offen. Nach der Voraussetzung ist das Bild aber eine Teilmenge von Q und die einzige (in $\mathbb{C}$!) offene Teilmenge von Q ist die leere Menge. Dies liefert einen Widerspruch, also ist f konstant.



$\mathcal{J.F.B.}$