Frühjahr 23 Themennummer 2 Aufgabe 2 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

In dieser Aufgabe bezeichne f die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x \ln |x|, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$

a) Zeigen Sie, dass f nicht lokal lipschitzstetig ist.

b) Bestimmen Sie die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = f(x), \quad x(0) = e^{-1}.$$

Hinweis: Es könnte helfen die Ableitung der Funktion $G \; :]0,1[\to \mathbb{R}, G(x) := \ln(|\ln(x)|)$ zu berechnen.

c) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $x : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $x' = f(x)$. Erläutern Sie, was sich über das Monotonieverhalten der Lösung aussagen lässt, falls $0 < x(t) < 1$ für alle $t \in I$ gilt, und was, falls $-1 < x(t) < 0$ für alle $t \in I$ gilt.

d) Entscheiden Sie mit Begründung, ob das Anfangswertproblem

$$x' = f(x), \quad x(0) = 0$$

eine eindeutig bestimmte maximale Lösung besitzt.

Lösungsvorschlag:

a) Wäre f lokal lipschitzstetig, so gäbe es ein $\delta > 0$ und ein $L > 0$ mit $|x - 0| < \delta \implies |f(x) - f(0)| < L|x - 0|$, also $0 < |x| < \delta \implies |x \ln |x|| < L|x|$. Für $N \in \mathbb{N}$ groß genug ist $\frac{1}{n} < \delta$ für alle $n \geq N$ und es würde nach Multiplikation mit n die Ungleichung $|\ln \frac{1}{n}| < L$ folgen. Diese ist aber nicht für alle $n \geq N$ richtig, weil $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \frac{1}{n} = -\infty$ ist. Damit kann f nicht lokal lipschitzstetig sein.

b) Die Funktion $x(t) = e^{-e^t}$ ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und besitzt als Ableitung $x'(t) = e^{-e^t} \cdot (-e^t) = x(t) \cdot \ln |x(t)|$, weil $x(t)$ stets positiv ist und der natürliche Logarithmus die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion ist. Außerdem gilt $x(0) = e^{-1}$ weswegen wir eine globale Lösung gefunden haben.

c) Ist $0 < x(t) < 1$, so $\ln |x| < \ln 1 = 0$, also $x'(t) = x(t) \ln |x(t)| < 0$, weil das Produkt einer positiven und einer negativen Zahl negativ ist. Die Ableitung ist also strikt negativ und die Lösung fällt monoton. Ist dagegen $-1 < x(t) < 0$ so ist wieder $\ln |x(t)| < 0$, aber auch $x(t) < 0$ und weil das Produkt zweier negativer Zahlen positiv ist, ist $x'(t) > 0$ und die Lösung steigt streng monoton

d) Die konstante Nullfunktion ist eine Lösung dieser Gleichung. Tatsächlich ist es die einzige Lösung. Um das zu zeigen, nehmen wir an, es gebe eine weitere Lösung x, die dann unweigerlich eine Stelle $t_0 \in \mathbb{R}$ besitzt, für die $x(t_0) \neq 0$ gilt. Wegen der Anfangsbedingung $x(0) = 0$, ist $t_0 \neq 0$. Die Funktion x ist also eine Lösung des

Anfangswertproblems $y' = f(y),\ y(t_0) = x(t_0)$. Weil f außerhalb der 0, d. h. eingeschränkt auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ stetig differenzierbar ist, ist sie dort auch lokal lipschitzstetig, in einer Umgebung um t_0 besitzt dieses Problem daher eine eindeutige Lösung, wir unterscheiden ein paar Fälle.
Ist $|x_0| = 1$, so ist die Lösung, die konstante Funktion ± 1, ist $|x_0| > 1$, so kann die Lösungskurve, die konstante Funktion 1 beziehungweise -1 nicht schneiden. In beiden Fällen bleiben wir der 0 fern und erhalten eindeutige Lösbarkeit und eine Lösung ohne Nullstellen.
Ist $0 < x_0 < 1$, so ist die Lösung durch $\exp(-\exp(t - t_0 + \ln(-\ln(x_0)))$ gegeben, diese Funktion löst das AWP global und der Bildbereich liegt in (0,1), d. h. in einem Bereich, in dem f lokal Lipschitzstetig ist. Insbesondere kann diese Funktion keine Lösung der Differentialgleichung zur Anfangsbedingung $x(0) = 0$ sein.
Für $-1 < x_0 < 0$ erhalten wir völlig analog einen Widerspruch mittels der Lösung $-\exp(-\exp(t - t_0 + \ln(-\ln(-x_0)))$.
Jeder Fall für x_0 führt zu einem Widerspruch, also kann es keine zweite Lösung geben.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$