Frühjahr 23 Themennummer 1 Aufgabe 5 im Bayerischen Staatsexamen Analysis (vertieftes Lehramt)

Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Differentialgleichung

$$x' = f(x).$$

Eine *Erhaltungsgröße* für f ist eine stetig differenzierbare Funktion $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die entlang jeder Lösungskurve dieser Differentialgleichung konstant ist.

a) Zeigen Sie: Ist $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Erhaltungsgröße für f, so auch für das Vektorfeld $x \mapsto s(x)f(x)$ für jede stetig differenzierbare Funktion $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

b) Es sei nun A eine reelle $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie: Ist E eine Erhaltungsgröße für das Vektorfeld $f(x) = Ax$ und B eine invertierbare reelle $n \times n$-Matrix, so ist $x \mapsto E(B^{-1}x)$ eine Erhaltungsgröße für das Vektorfeld $g(x) = BAB^{-1}x$.

c) Es sei nun A eine reelle 2×2-Matrix mit den beiden reellen Eigenwerten $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = +2$. Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $f(x) = Ax$ eine nicht-konstante Erhaltungsgröße hat.

Lösungsvorschlag:

Ist u eine Lösung von $x' = f(x)$ und E eine Erhaltungsgröße, so folgt für $h(t) = E(u(t))$ auch $0 = h'(t) = \langle \nabla E(u(t)), u'(t) \rangle = \langle \nabla E(u(t)), f(u(t)) \rangle$ für alle t im Lösungsintervall, weil h konstant ist. Weil f stetig differenzierbar, also auch lokal Lipschitzstetig ist, gibt es zu jedem Anfangswert eine eindeutige maximale Lösung, deswegen muss die Gleichung $\nabla E(y)f(y) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$ gelten. Erfüllt nämlich ein $y \in \mathbb{R}^n$ diese Gleichung nicht finden wir eine Lösung der Differentialgleichung zur Anfangsbedingung $u(0) = y$, was dann wegen $h'(0) \neq 0$ eine Widerspruch liefert. Ist umgekehrt E stetig differenzierbar und erfüllt die Gleichung $\langle \nabla E(y), f(y) \rangle = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$, so ist E eine Erhaltungsgröße, weil für jede Lösung u die Gleichung $\nabla(E(u(t)) = 0$ für alle t im Lösungsintervall gilt, d. h. E entlang der Lösungskurve konstant ist.

a) Ist E eine Erhaltungsgröße für f, so folgt nach der Vorbemerkung $\langle \nabla E(x), f(x) \rangle = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, also auch $\langle \nabla E(x), s(x)f(x) \rangle = s(x) \cdot 0 = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und nach der Vorbemerkung ist E Erhaltungsgröße für das skalierte Vektorfeld.

b) Nach Voraussetzung und Vorbemerkung gilt $\langle \nabla E(x), f(x) \rangle = \langle \nabla E(x), Ax \rangle = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Wir berechnen für $\tilde{E}(x) = E(B^{-1}x)$ den Gradienten mit der Kettenregel. Man beachte $\nabla h = (Dh)^{\mathrm{T}}$. Es ist $\nabla \tilde{E}(x) = (B^{-1})^{\mathrm{T}} \nabla E(B^{-1}x)$, also $\langle \nabla \tilde{E}(x), g(x) \rangle = \langle (B^{-1})^{\mathrm{T}} \nabla E(B^{-1}x), BAB^{-1}x \rangle = \langle \nabla E(B^{-1}x), B^{-1}BAB^{-1}x \rangle = \langle \nabla E(B^{-1}x), AB^{-1}x \rangle = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Nach der Vorbemerkung ist $\tilde{E}$ eine Erhaltungsgröße von g, da es sich wieder um eine stetig differenzierbares Vektorfeld handelt.

c) A hat zwei verschieden reelle Eigenwerte, ist also diagonalisierbar über $\mathbb{R}$, d. h. es gibt eine invertierbare reelle 2×2-Matrix B mit $A = B \operatorname{diag}[-1, 2]\, B^{-1}$. Hierbei bezeichnet $\operatorname{diag}[-1, 2]$ die Diagonalmatrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Wir betrachten jetzt die stetig differenzierbare, nicht-konstante Funktion $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ E(x, y) = x^2y$. Es gilt für alle $(x, y)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$ die Gleichung $\langle \nabla E(x, y),\ \mathrm{diag}[-1, 2]\ (x, y)^{\mathrm{T}} \rangle = \langle (2xy, x^2)^{\mathrm{T}}, (-x, 2y)^{\mathrm{T}} \rangle = -2x^2y + 2x^2y = 0$, also ist E eine Erhaltungsgröße für das Vektorfeld $f(x) = \mathrm{diag}[-1, 2]\ x$. Nach Teil b) ist $\tilde{E}(x) = E(B^{-1}x)$ eine Erhaltungsgröße von $g(x) = B\ \mathrm{diag}[-1, 2]\ B^{-1}x = Ax$. Das Vektorfeld $\tilde{E}$ ist auch nicht-konstant, weil der Gradient des Vektorfelds nicht konstant 0 sein kann. Sonst wäre $\nabla E(B^{-1}x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ im Kern von B^{-1} gelegen, der nur aus 0 besteht, d. h. $\nabla E(B^{-1}x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und damit, weil das Bild von B^{-1} der ganze $\mathbb{R}^n$ ist, auch $\nabla E \equiv 0$, d. h. E wäre konstant, was aber nicht der Fall ist.

$\mathcal{J}.\mathcal{F}.\mathcal{B}.$