Aufgabe 3:

Im Weiteren bezeichnen $(f_n)_n$, $(g_n)_n$ und $(h_n)_n$ Folgen stetiger reeller Funktionen $f_n, g_n, h_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ und 0 die Nullfunktion auf $[0,1]$.

a) Beweisen Sie: Konvergiert $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen 0, dann gibt es eine Schranke $A \in \mathbb{R}$ mit $|f_n(x)| \leq A$ für alle $x \in [0,1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Bestimmen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Maximum der Funktion

$$g_n(x) = n^2 x e^{-nx}$$

auf $[0,1]$.

c) Beweisen Sie: Die Folge $(g_n)_n$ mit g_n wie in Teilaufgabe b) konvergiert auf $[0,1]$ punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen 0.

d) Beweisen oder widerlegen Sie jeweils: Konvergieren $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen 0 und $(h_n)_n$ punktweise gegen 0, dann konvergiert die Folge $(f_n h_n)_n$ der Produktfunktionen $f_n h_n \ldots$

(1) ... punktweise gegen 0.

(2) ... gleichmäßig gegen 0.

(1 + 1 + 2 + 2 Punkte)

a) $f_n \xrightarrow{\text{gleichm.}} 0 \implies \exists A \in \mathbb{R} : \forall x \in [0,1] : |f_n(x)| < A$

$f_n \xrightarrow{\text{gleichm}} 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - 0\|_{sup} = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_{sup} = 0$

Also $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N: \|f_n\|_{sup} < 1$

$A = \max\{1, \underbrace{\|f_0\|_{sp}}_{<\infty}, \ldots, \underbrace{\|f_N\|_{sp}}_{<\infty}\} + 1$

↳ Weierstraß Fkt. stetig auf komp. Intervall $\implies \|\ \|_{sp} < \infty$

$\implies \|f_n\|_{sp} < A + \frac{1}{2}$

b) $g_n(x) = n^2 x e^{-nx}$ $\quad [0,1]$

$g_n'(x) = n^2 e^{-nx} - n^3 x e^{-nx} = e^{-nx} \cdot n^2 (1 - nx) = \begin{cases} > 0 & 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ = 0 & x = \frac{1}{n} \\ < 0 & 1 \geq x > 1/n \end{cases}$

↳ g_n smw auf $[0; \frac{1}{n}[$

smf $\quad]\frac{1}{n}, 1]$

$\implies \max\limits_{x\in[0,1]} g_n(x) = g_n(\frac{1}{n}) = ne^{-1}$

c) punktw. Konvergenz

$x_0 = 0 \quad g_n(0) = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$x_0 \in]0,1] : g_n(x_0) = \frac{n^2 x_0}{e^{nx_0}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

nicht gleichm.

$\|g_n - 0\|_{sp} = \|g_n\|_{sp} \overset{b)}{=} \frac{n}{e} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

d) (1) wahr $\quad$ sei $x_0 \in [0,1]$

$(f_n \cdot h_n)(x_0) = \underbrace{f_n(x_0)}_{\to 0} \cdot \underbrace{h_n(x_0)}_{\to 0} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

gleichm. Konv. $\implies$ punkt. Konv.

(2) falsch $\quad$ Gegenbeispiel $\quad f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\quad$ konv. gleichm. gegen 0 für $n \to 0$

$h_n(x) = g_n(x) = n^2 x e^{-nx}$

$\|f_n h_n\| = \frac{n}{e\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{e} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$