Aufgabe 2:

Es sei

$$f:\mathbb{C}\setminus\left\{i, i+\frac{1}{\pi}\right\}\longrightarrow \mathbb{C},\quad z\mapsto \overbrace{\cos\left(\frac{1}{z-i}\right)}^{h(z)}\cdot\overbrace{\frac{1}{z-i-\frac{1}{\pi}}}^{g(z)}.$$

a) Geben Sie den Typ aller isolierten Singularitäten von f und im Fall von Polstellen auch deren Ordnung und Residuum an. Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Geben Sie die maximale offene punktierte Kreisscheibe mit Mittelpunkt i an, auf der die Laurentreihenentwicklung von f um i konvergiert, und bestimmen Sie das Residuum von f in i.

c) Es sei $\gamma:[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{C}$, $t\mapsto 2e^{it}$. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma f(z)\,dz$.

(2 + 3 + 1 Punkte)

a) $\underline{z=i}$ – wesentl. Singularität

$h(z)=\cos\left(\frac{1}{z-i}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}(z-i)^{-2n}$

Laurentreihe

hat in $z=i$ wesentl. Sing.

Casorati-Weierstraß

CW

$\Rightarrow \exists (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}\setminus\{i\}$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n=i$ und $\lim_{n\to\infty} h(z)=1$

$\exists (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}\setminus\{i\}$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n=i$ und $\lim_{n\to\infty} h(z)=2$

$g(i)=-\pi$

Also $\left.\begin{array}{l}\lim_{n\to\infty} f(z_n)=-\pi\\ \lim_{n\to\infty} f(w_n)=-2\pi\end{array}\right\}$ also hat f in i eine wesentl. Sing.

$\underline{z=i+\frac{1}{\pi}}$

Polstelle 1. Ordnung: $\left(z-\left(i+\frac{1}{\pi}\right)\right)f(z)=\cos\left(\frac{1}{z-i}\right)$ hat in $z=i+\frac{1}{\pi}$ heb. Sing.

$\operatorname{Res}_{i+\frac{1}{\pi}} f=\left.\frac{\cos\left(\frac{1}{z-i}\right)}{1}\right|_{z=i+\frac{1}{\pi}}=-1$

b) • $B_{\frac{1}{\pi}}(i)\setminus\{i\}$

Abstand i und $i+\frac{1}{\pi}$

• $\cos\left(\frac{1}{z-i}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}(z-i)^{-2n}\quad\forall z\neq i$

• $\frac{1}{z-(i+\frac{1}{\pi})}=\frac{\pi}{\pi(z-i)-1}=-\pi\cdot\frac{1}{1-\underbrace{\pi(z-i)}_{=w}}=-\pi\cdot\sum_{n=0}^{\infty}w^n$ für $|w|=\pi|z-i|<1$ $\Rightarrow |z-i|<\frac{1}{\pi}$ Radius

geom. Reihe

$=-\pi\sum_{n=0}^{\infty}\pi^n(z-i)^n=\sum_{n=0}^{\infty}-\pi^{n+1}(z-i)^n$

• $\cos\left(\frac{1}{z-i}\right)\left(\frac{1}{z-i-\frac{1}{\pi}}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}(z-i)^{2n}\Big)\Big(\sum_{h=0}^{\infty}-\pi^{h+1}(z-i)^h$

$\operatorname{Res}_i f(z)=\sum_{\underbrace{-2n+h=-1}_{\text{es interessiert nur } a_{-1}}}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}(-1)\pi^{h+1}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n)!}\pi^{2n}$

$\Rightarrow -\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\cdot\pi^{2n}}_{=\cos(\pi)=-1}+1=2$

c) $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$

$t\mapsto 2e^{it}$

$\int_\gamma f(z)dz=2\pi i\left(\operatorname{Res}_i f(z)+\operatorname{Res}_{i+\frac{1}{\pi}} f(z)\right)\cdot 1$ Umlaufzahl

$=2\pi i\,[\,2+(-1)]=2\pi i$