Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie eine nicht fortsetzbare Lösung $\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}$ der exakten Differentialgleichung

$$2t + 4t^3 + 2xx' = 0 \tag{1}$$

zum Anfangswert $x(0) = 1$. Geben Sie insbesondere auch deren Definitionsintervall I an.

b) Zeigen Sie, dass für jede Lösung $\mu : J \longrightarrow \mathbb{R}$ von (1) sowohl J als auch $\mu(J)$ beschränkt sind.

(3 + 3 Punkte)

a) $2xx' = -2t - 4t^3$ exakte DGL $x(0)=1$

$\int 2x \, dx = -\int 2t + 4t^3 \, dt$

$\Rightarrow x^2 = -t^2 - t^4 + c$

$x(0) = 1 \Rightarrow c = 1$

$x(t) = \sqrt{1 - t^2 - t^4}$ (da $x(0) > 1$) nur pos. Wurzel

$x_{max}: I \to \mathbb{R} \quad t \longmapsto \sqrt{1 - t^2 - t^4}$

$1 - t^2 - t^4 = 0$

$t^4 + t^2 - 1 = 0 \qquad u = t^2$

$\Leftrightarrow u^2 + u - 1 = 0$

$u_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \qquad u_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$

$u_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ → kann keine Lsg sein

$t^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$

$t = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{5} - 1/2}$

$\Leftrightarrow I = \left] -\frac{\sqrt{5}-1}{2} ; \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right[$

b) $x^2 = -t^2 - t^4 + c \Rightarrow$ Erhaltungsgröße für jede Lösung μ $\quad c = \mu^2(t) + t^2 + t^4$

$E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x,t) \mapsto +x^2 + t^2 + t^4$ nur + und gerade Potenzen

$N_c^E = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid E(x,t) = c\}$ ist kompakt ← beschr. und abgeschl.

- Abgeschlossenheit: sei $(x_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konv. Folge in N_c^E

  sei $\tilde{x} = \lim_{n\to\infty} x_n$, $\tilde{t} = \lim_{n\to\infty} t_n$, dann

  $\forall n \in \mathbb{N}: \quad c = x_n^2 + t_n^2 + t_n^4 \Rightarrow c = \tilde{x}^2 + \tilde{t}^2 + \tilde{t}^4$

  $\Leftrightarrow (\tilde{x}, \tilde{t}) \in N_c^E$ ✓

- Beschränktheit: $\forall (x,t) \in N_c^E$

  $\|(x,t)\|^2 = x^2 + t^2 \leq x^2 + t^2 + t^4 = c$

  Ist $\mu(t)$ Lösung, dann $\exists c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\mu^2 + t^2 + t^4 = c$

$\Rightarrow t \in \left] -\sqrt{c} ; \sqrt{c} \right[\quad (\hat{=} J)$

$\overset{x}{\underset{\mu}{\parallel}} \in \left] -\sqrt{c} ; \sqrt{c} \right[\quad (\hat{=} \mu(J))$

□